哲學輕鬆讀

Logic

思考的祕密

傅皓政 著

三民書局

哲學人的哲學事——序言

Q 遇見哲學的那天：

在每個人的生命中，都會遇見哲學！仔細回想一下，只要你曾經在心頭浮現「為什麼?」那一剎那，就是和哲學相遇的時刻。我自然也不例外。哲學！就在我充滿疑問的時候來拜訪。

從小就是好奇寶寶的我，總是希望能夠完美地尋找事物之所以如此的理由，也希望徹底了解我應當如何過快樂的生活。可惜的是，從來沒有什麼學科能夠真正滿足我的好奇心，直到高中時期和同學們瘋著唸翻譯小說，接觸到笛卡兒的《方法論》與《沉思錄》。當時，笛卡兒的話真的讓我「沉思」了很久，我也一直以為笛卡兒的書之所以名為《沉思錄》，就是要藉由這種冥想和沉思的方法，讓人從心靈去尋求問題的解答。也正是在那個強作解人的時代，不知不覺間，就和哲學悄悄地結下了不解之緣。雖然對當時的我而言，許多問題仍然是懵懂難解，可是在那個初遇哲學的時期，我真的就像一個迷路的人，找到某個路標一樣高興。

Q 哲學對作者的意義：

走進哲學之路，漸漸能夠體會哲學的誘人之處。對我而言，哲學就是一個奇幻世界的組合，因為有許多問題是那麼地切身卻又無法解決，其實真的是又好氣又好笑。不過，生命本來就有許多難解的問題！例如人終究難免一死，從歷史的記載中也發現，並沒有多少人名留青史，所以人似乎沒什麼好計較的。可是，從另一方面來說，生命並不會因為沒有名留青史就沒有意義，積極的生活態度一直是被鼓勵的。那麼，我們有什麼好的理由鼓勵積極的生活態度呢？雖然我們每天面對類似這樣的切身問題，但是能夠說出好理由的人實在不多，也難怪每個世代都存在所謂的代溝了。因為，如果你教我要用積極的態度生活，可是當你面對這樣的問題時，卻又不用積極的態度去尋求答案，那麼有什麼立場可以要求我採取積極的生活態度呢？

Q 本書特別之處：

所以，不妨試著回答剛剛的問題：「人為什麼要採取積極的生活態度？」當你試圖回答這個問題的時候，就會發現你已經進入了本書的主要宗旨——提出論證說服別人。而所謂的提出論證說服別人，千萬不可和獨斷地要求別人混為一談。提出論證說服別人的意思是，用某些對方不得不信服的前提，經由正確的推論規則，進而達到對方不得不接受

結論的情況。然而，獨斷地要求是毫無正當理由的。如果在你的生命中，曾經出現需要對某些事件解釋其原因，或者提出理由使對方接受某些主張的情況，那麼本書的內容對你而言，一定會有所幫助。

還有一些話要說：

更何況，現代社會是一個文明社會，大家都已經習慣利用語言的交談來完成許多活動，如果不具備一些推理的基本常識，在生活上一定會經常感到窒礙難行。為了避免因為語言上的誤解，而使自己鬱鬱寡歡的情況出現。藉由本書來段自我檢視，順便欣賞大腦的基本思考結構，相信可以為你的生活，降低許多不必要的誤解和麻煩！

思考的祕密

目次



從遊戲看邏輯

秋日的午後，太陽早早地收起炙人的箭芒，徐徐的微風像是報信者一般，提醒著人們寒冬將至。靜雪佇立在捷運站出口，微笑著欣賞街上的儷影雙雙對對依偎的樣子。不一會兒，熟悉的聲音在耳畔響起——「靜雪！」聽到熟悉而溫情的呼喚，靜雪的笑容在午後的微風中飄揚地更加燦爛。

「群峰，你摸摸我的手，是不是很冷呀！」靜雪撒嬌地說道。聽著靜雪這麼說，群峰就將靜雪的手握在自己的手中，感受著靜雪的溫度。「嗯！果然有點兒冷，可是現在才秋天而已，妳的手就已經這麼冷，等冬天一來，怎麼受的了？真苦了我的小寶貝。」聽著群峰這麼溫柔地說道。靜雪感到襲上心頭的是一陣陣溫暖。群峰執起靜雪的手，說道：「靜雪，走！我們到附近的百貨公司逛逛。」靜雪綻著盛開的笑靨，刻意緊握著群峰。



走在路上的兩人，就像染紅了盛開的玫瑰一般，極力地放射著自己的熱情。走著走著，靜雪覺得群峰刻意地拉著她轉進賣毛料的專櫃，放眼望去都是各式各樣的手套、圍巾、帽子等禦寒用品。只見群峰用心地看著，眼睛一亮，拿起一雙鵝黃色的手套，隨即拉起了靜雪的手，溫柔地將手套套在靜雪的手上。這時候的群峰，依舊掛著打心底升起的微笑，仔細端詳著靜雪帶著手套的雙手。對著靜雪說道：「這雙手



套挺適合妳的，妳瞧！微暈的黃剛好襯出妳文靜的特質，加上我的體貼和關懷。妳戴著它，一定會讓幸福打心裡決堤！」經過群峰這麼一說，靜雪真的開心極了。

從眸子裡溢出一臉幸福的靜雪，對著群峰說道：「峰，謝謝你！可是……，奇怪，你怎麼會想到帶我來買手套呢?」「咦！妳剛剛不是說需要手套嗎？我當然就帶妳來買手套啊。」群峰笑著說道。靜雪瞪著水澄澄的大眼睛說：「我?！我剛剛沒有這麼說啊?」群峰笑得更開心了，衝著靜雪直說道：「有啊，剛剛妳很『用心』地告訴我，妳需要一雙手套，所以我當然義不容辭地幫妳達成心願啊。」看著群峰笑得這麼開心，靜雪還是覺得有點不解，細聲輕語地對群峰說道：「峰！我是需要手套沒有錯，可是你怎麼會知道呢?我又沒有明白地說出來，你怎麼會知道我希望你送我手套呢?」





群峰深情地看著靜雪說：「小傻瓜！妳把我當大傻瓜嗎?剛剛一見面的時候，妳就忙不迭地讓我握著妳的手，還很撒嬌地

告訴我『你瞧瞧我的手冷不冷?』我又不是木頭，當然知道妳撒嬌的目的是什麼了。」靜雪聽著群峰這麼說，心裡甜甜地甚是受用。微笑地說道：「峰！你最聰明了。這就是為什麼我這麼喜歡你的原因了。」群峰也笑著回道：「妳不用一直恭維我，我的信用卡可是有限額的。哈哈哈！不過，靜雪！妳別擔心，信用卡有限額，我對妳的心意卻是無限寬廣的喲。」靜雪刮著臉頰對群峰說：「呵……！羞羞臉！老鼠上天平，自稱自讚。看在你懂得體貼我的心意上，我就承認你這次很厲害，可以了吧。」群峰當然滿意地接受靜雪的調笑。

群峰將包裝拆開之後，替靜雪把手套戴上，然後把自己的臉湊到靜雪的手上。靜雪也非常識相地輕撫著群峰的臉。就在群峰滿臉的幸福與陶醉之際，靜雪突然頑皮地捏了群峰一把，然後往電扶梯跑去。

一般人在日常生活中，可以說無時無刻都會用到推論。雖然在未經反思的情況下，鮮少人會注意自己的思考是怎麼一回事。可是我們通常會說，有許多人比較會說話，或者某些人經驗比較豐富等。這些說詞其實都說明了，經過思考訓練的人，做起事來或是說話方面通常會比較有效率地達成目標。而在這個小故事中，我們可以發現，群峰利用了簡單的推論，以靜雪所說的話，得到了「靜雪需要手套!」的結論，並且利用這樣的能力，



製造了一些生活上的默契，讓兩個人的感情更進一步。可見培養基本推論的能力，不但可以讓自己在處理事情上更有條理，同時也能夠增加生活的樂趣。

每個人雖然都有不同的生活方式，卻無可避免地需要溝通。在溝通的層面上，藉用語言進行溝通無疑地是最普遍的方式了。然而，我們怎麼能夠從別人所說的話當中，推論出對方所要的結論呢？換言之，所謂的默契是否就是隱藏在每個人腦中的思考規則呢？更有趣的是，既然可以稱之為默契，是否意味著每個人腦中的思考規則是一樣的呢？邏輯學的研究目標，就是希望解開人類思考的祕密。同時也希望每個人在閱讀本書之後，能夠像故事中的群峰一般，將學到的邏輯知識應用在生活中，使生活更加多彩多姿。

什麼是邏輯

每個人的日常生活脫離不了說話，而且大部分說的必須是有道理的話。之所以要說有道理的話，不僅是為了說服他人，同時也為了說服自己。有些人會認為：「做人何必那麼辛苦，我不需要說服他人，反正對方相信就相信，不相信就不相信，誰管他呢?」不過有趣的是，這正是你說服自己

的過程，而你會自認為剛剛那個想法是有道理的。而日常對話中的道理，正是邏輯所要研究的課題。

儘管我們知道，邏輯是研究日常對話中的道理，但是想要毫無爭議而清楚地回答——什麼是邏輯？(What is logic?) 還是非常困難的。因為在歷史上，使用「邏輯」這個語詞的人不在少數，也正因為如此，造成許多人對邏輯一詞有不同的解釋。不過，我們不妨將這個疑問暫時擱置，因為想要精通邏輯的基本功夫，並不需要懂得所有關乎邏輯的歷史。因此，各位只要知道在本書中即將接觸的邏輯，是指古典邏輯 (classical logic) 就可以了！那麼，在古典邏輯的觀點下，邏輯系統所要處理的問題是什麼呢？針對這個問題，有個還算普遍可以接受的回答是：邏輯是研究有效性 (validity) 的學科。

所謂有效性就是要找出有道理的推論，這些推論就稱為有效推論。不過，在直覺上認為有道理的推論，難道就是有效推論嗎？當然不是。正因為我們無法憑直覺回答，哪些推論是有效推論、哪些推論不是有效推論的問題，所以，邏輯的研究的確是不可或缺的。讓我們回到先前的故事，男主角只是簡單地憑直覺猜出女主角需要一雙手套嗎？其實不然，男主角知道女主角的需要，是憑藉推論所得到的結論。這個推論的程序是：

> 把 validity 翻譯成有效性，是一般邏輯中文書常見的翻譯，如果讀者們覺得很難理解，建議不妨把它想成正確的推論 (correct reasoning)。

1. 女主角撒嬌地向男主角說:「你看我的手冷不冷。」
2. 男主角開始進行推論——如果女主角對我表示她的手會冷,那麼意思就是女主角希望我送她一雙手套。
3. 女主角藉著行動和語言表示她的手會冷。
4. 因此,可以推論出「她希望我送給她一雙手套」的結論。

事實上,在日常生活的溝通過程中,每個人都會依據對方所說的話,或所做的動作,推論出某些結論。然而有趣的是,一般人雖然每天都在從事推論的活動,但是大多數的人卻對研究推論的學問——邏輯——陌生得很。想想看,在上述的故事中,如果男主角不解風情,一定要等到女主角開口說:「我需要一雙手套」,男主角才能知道的話,豈非大煞風景?

所以,在日常生活中,運用道理去和別人溝通或相處是十分重要的。然而,什麼是道理呢?簡單來說,就是符合思考規則的推論過程。換言之,當你斷定別人說的話有道理時,就是認定對方的敘述,符合正確的思考規則,也就是對方所說的理由可以充分支持結論。反過來說,斷定某個人說的話沒道理,就是他的推論不符合正確的思考規則。

接下來,讓我用一些簡單的例子,說明什麼是正確的思考規則。假設我對你說 (S_1):「我手上有一顆紅色的圓球」,毫無疑問地,你可以經由 S_1 得到結論 S_2:「這顆球是圓形

的」。反省一下，你怎麼知道這顆球是圓形的呢？（讓自己認真反省一下，你是根據什麼認定整個推論過程有道理呢？）

為什麼可以認定，從 S_1 得到 S_2 的推論過程，是一個有道理的推論過程呢？首先，考慮一下你獲得的資訊。你所擁有的資訊是——S_1：「我手上有一顆紅色的圓球」。然後，你可以將 S_1 改寫成語句 S_3：「我手上的這顆球是圓形的而且這顆球是紅色的」。接著，根據正確的思考規則，你可以得到結論 S_2：「這顆球是圓形的」。換言之，在你確定擁有的資訊 (S_1) 正確的情況下，可以保證結論 (S_2) 一定是正確的。我們會認為，這個推論過程符合正確的思考規則。所以，從 S_1 推論而得到 S_2，是一個有效的推論。這個推論過程的形式如下：

這顆球是圓形的　而且　這顆球是紅色的

所以，這顆球是圓形的

可是，如果我告訴你 S_4：「我手上有一顆球」，然後請你回答：「這顆球是什麼形狀？」你一定會非常疑惑。為什麼？因為在這個情況下，你似乎只能猜這顆球是什麼形狀，而不能從原有的資訊中，得到肯定的答案。因此，如果你從 S_4 得到結論 S_2：「這顆球是圓形的」，顯然不符合正確的思考規則。也就是說，即使你確定擁有的資訊 (S_4) 是正確的，也不能保證結論 (S_2) 是正確的。

接下來，讓我改變一下說詞。假設我對你說 S_5：「這顆



球是圓形的或者這顆球是紅色的」，從 S_5 可以得到 S_2：「這顆球是圓形的」的結論嗎？顯然不行。因為根據語句 S_5，只能肯定「這顆球是圓形的」或者「這顆球是紅色的」兩者之一是真的。換言之，從語句 S_5 所表達的意思來看，這顆球可能是圓形但是卻不是紅色的；或者是一顆紅色的球但不是圓形的。也就是說，這顆球可能是一顆「紅色的美式橄欖球」或者是「白色的排球」等等。所以，在既有資訊 (S_5) 正確的情況下（想像在我手上的是一顆紅色的橄欖球），還是無法保證結論 (S_2) 是正確的。從 S_5 推論出 S_2 的過程，顯然不符合正確的思考規則。所以，從 S_5 推論而得到 S_2，是一個無效 (invalid) 的推論。這個推論過程的形式如下：

這顆球是圓形的　或者　這顆球是紅色的

所以，這顆球是圓形的。

其實在日常生活中，很少人會去注意自己的推論，是不是符合正確的思考規則。在上述兩個推論過程的比較下，我們可以發現，如果在日常生活的溝通中，不能熟練地運用正確的思考規則，就不能要求別人一定要接受你的結論了。可見，認識思考規則是非常重要的事。讓我們再看看底下的例子：

所有的人都有母親
秦始皇是人

所以秦始皇有母親

我想，如果有人問你：「秦始皇有沒有母親?」你一定會直接回答「肯定有！」可是你怎麼可以這麼肯定呢？你見過秦始皇的母親嗎?還是歷史上有「秦始皇有母親」的文獻呢?恐怕都不是。然而，你還是會強調你十分肯定秦始皇有母親。為什麼呢？憑直覺？憑想像？其實是因為你經過很快速又簡短的推論活動，進而肯定「秦始皇有母親」。只是實在太快速和簡短，害你以為是直覺而非推論！可見，有許多知識並非來自親眼所見，或者是閱讀書報所得，而是經由自己的大腦運作，也就是經由正確的思考規則推論而得到的結論。因此，我們應當好好珍惜，並充分發揮身為人類的特殊能力，千萬別暴殄天物！

從語言遊戲看邏輯

要將邏輯學好，並不是非常困難的事，因為學習邏輯就跟玩遊戲一樣。就拿下棋來說，沒有人光是在棋局旁邊指指點點而成為下棋高手的，一定要多和別人廝殺一番，才能體會箇中滋味。而且我們會發現，棋手的段數越高，對棋局的觀察會越細緻，同時也更能將棋藝發揮得淋漓盡致。所以，每一場棋賽對下棋好手來說，都可說是創作藝術的過程。如果真能下出一盤好棋來，就如同畫家畫了一幅自己非常滿意的畫作，或如同雕塑家刻出幾可亂真的藝術品一般，那種雀躍之情是難以形容的。同樣地，如果你以同樣的心情來面



對邏輯，相信邏輯的饗宴會讓你覺得非常有趣。

讓我們從下棋開始說起，假設你對象棋毫無所悉，那麼成為下棋好手之前，你應該做些什麼呢？我想，花點兒時間好好認識棋子是頂重要的吧！否則，連將、士、象是什麼都搞不清楚的話，根本沒有辦法開始和別人下棋。在認識棋子之後，接下來就必須決定，要用棋子玩什麼遊戲？這一點非常重要。因為在不同的遊戲中，棋子的移動方式和功能完全不一樣。例如，軍棋和暗棋，甚至三國棋，都有著不同的規則。

上面所提到的各種象棋遊戲，所使用的工具都一樣，也就是相同的棋子和棋盤。不過，儘管工具都一樣，卻可以設計出不同玩法，當然要遵守的規則也不一樣。如果把日常生活的對話，看成是一場遊戲，那麼我們所說的每一句話，就跟棋子的角色一樣。如果要達到說服別人或自己的目的，就跟熟悉下棋的規則一樣。如果你希望日常生活溝通遊戲也

遊戲理論 (game theory)

「遊戲理論」乃是探討人類在遊戲中的互動結構，並且說明如何以理性的「策略」(strategy) 參與這些活動。此理論最早是由數學家馮・諾曼 (John von Neumann, 1903–1957) 和經濟學家摩根斯騰 (Oskar Morgenstern, 1902–1976)，在 1940 年代初期發明的。





能玩得精彩；如果你希望透過溝通活動，獲得別人的認同；如果你希望透過有條理的分析，讓別人接受你的觀點。如果你想要達到這些目的，那麼知道什麼是正確的思考規則和多加練習，就是不二法門。就像要成為下棋好手一樣，不但要學習象棋的規則，還必須經常練習。接下來讓我們仔細想想，說話有什麼規則可言呢？平常人難道不是想說什麼就說什麼嗎？那可不一定。讓我舉個淺顯的例子：

假設你的親人是癌症末期病患，你們從醫生口中得知了這個事實，但是病人卻不知道。這個時候，作為親人的你們會開始討論：「到底要不要告訴病人實情呢？」在做出決定之前，每個人都會進行推論活動，用來說服別人：

贊成告知 1：病人也許有一些未了的心願，可以趁他還在世的時候完成，讓他了無遺憾地離開人間。

反對告知 1：心理因素會影響生理因素，當一個人沮喪的時候，病情的惡化速度會加劇。

贊成告知 2：病人知道自己的狀況才能面對事實，重新設法讓自己活得好一點。

反對告知 2：病人無法接受事實，可能會作出一些令人意外的舉動。

由於大家都希望利用討論過程，作出最好的決定。因此在決定要不要告訴病人實情之前，所有的人會利用各種推論來相互激盪，希望得到最好的結論，也希望最後的決定是



最好的。換句話說，邏輯就潛藏在日常的對話中，溝通的目的，無非就是說服別人接受自己的主張，或者接受別人的主張。

當然在溝通的時候，別人並不盡然會接受自己主張的結論，為什麼呢？為什麼總是有人能夠反駁你所主張的結論呢？簡單來說，反駁的理由不外乎兩種情況：

(1)你所使用的規則是無效的推論過程。例如，企圖由「這顆球是圓形的或者這顆球是紅色的」這個事實，導出「這顆球是圓形的」的結論。如果你在推論時，利用這類的規則，那麼這個推論就是一個無效推論。

(2)你所用來支持結論的理由是沒有發生的事實。例如，雖然對方可以從「我手上的這顆球是圓的而且這顆球是紅色的」這句話，得到「這顆球是圓形的」的結論。不過，事實上你手上可能根本沒有球。所以，即使這個推論過程利用的思考規則是符合有效推論的規則，結論也不一定會被接受。

仔細想一想，他們反對你的理由是不是上述兩類呢！如果你是根據顯而易見的事實，再經過符合有效推論的思考規則，所得到的結論的話，就沒有人能夠反對你主張的結論。（當然，如果遇到為反對而反對的情況，邏輯是無能為力的。為了排除這個可能性，我們假設所有的人都具有理性能力，而且會遵照理性思考的方式進行溝通。

為什麼要學習邏輯

自從人類進入文明時代伊始，各種新興學科如雨後春筍般，紛紛出現。為了解釋自然界的現象，出現了天文學、物理學、化學等學科。為了探索抽象的世界，出現了數學、心理學。為了日常生活的秩序，倫理學、社會學等學科也相應而生。有趣的是在所有的學科中，具備著相同的特徵，就是要利用語言或文字陳述學科中的道理。而由於邏輯正是研究人類思考規則的學科，因此邏輯就成了這些學科的共同背景，因為沒有一個學科會僅由成見和獨斷的說法構成，就能夠讓其他人信服。換言之，所有的學問都必須建立在合理的推論上，古希臘哲學家亞里斯多德了解其重要性，因此著手研究人類的思考規則，進而發展出研究有效推論的科學——邏輯。更由於邏輯是所有學科的背景學科，因此亞氏將邏輯稱為第一科學 (First science)。

正如先前所提到的例子，邏輯不僅是追求學問所必須

亞里斯多德 (Aristotle, 384-322 BC)

傑出的古希臘哲學家。在青少年時期來到雅典，並且在柏拉圖學園 (Plato's Academy) 待了 20 年。柏拉圖辭世之後，亞里斯多德便展開旅行的生涯，後來回到馬其頓擔任亞歷山大大帝的私人教師。在西元前 335 年重返雅典，在呂克昂建立自己的哲學學校。





具備的背景知識，也被廣泛地運用在日常生活中，舉凡溝通、談判、對話等等，都會用到推論過程。但是，在日常生活中，不乏有人用「你的邏輯怪怪的」、「你的邏輯是錯的」等說詞，可是，當你反問他「什麼是邏輯?」的時候，對方通常是支支吾吾的，說不出個所以然來。仔細想想，會發生這種情況是非常可笑的。很多人居然自己不知道什麼是邏輯，卻可以理直氣壯地指責別人，但是更好笑的是，懂得反擊的人居然也不多。因此，如果你認為自己是理性的、文明的人類，具備基本的邏輯推論能力，絕對是當務之急。

更何況現在是個強調競爭力的時代，既然邏輯號稱第一科學，就表示邏輯是現代人不可或缺的能力。在接觸各種新知時，邏輯更是最基本的背景知識。所以，如果能夠掌握最基礎的道理——邏輯，一定能夠輕鬆地面對新的挑戰!



日常語言的論證

至泓跟慧美是一對相識五年的戀人，由於至泓工作的關係，兩人相聚時少而別離時多。因此，每次兩人的約會對至泓來說總是非常珍貴，至泓每次都會在電話這頭告訴慧美：「我明天中午在臺北火車站對面的新光三越的瞭望臺等妳，不見不散喔！」而慧美總是在另一端報以靦腆的笑聲說：「是，我們不見不散。」在慧美的心中，早就已經在盤算該穿著什麼樣的衣服赴約，她心裡想著：「上一次和至泓約會的時候，他很貼心地買了一套洋裝給我當禮物，想來穿上那套洋裝赴約應該是最恰當的吧！」慧美心裡想著想著，可是至泓只是個剛出社會的新鮮人，還沒有經濟能力買車，他總是騎著那部從大學以來就倚為交通工具的機車。「如果穿著洋裝，坐在摩托車上不但不方便，還可能弄髒了洋裝。」就為了穿適當的衣服赴約，讓慧美著實傷透了腦筋。



好不容易挨到了約會的時間，慧美終於決定穿著洋裝赴約。她心想，當至泓看到了她穿上洋裝，一定會非常高興，也會更愛她吧。於是她決定著洋裝出發，在途中她還特地將裙襬刻意拉得平整點兒，著意地展現自己的嫵媚。到了新光三越後，慧美踱著輕快的腳步買了瞭望臺的門票，搭著電梯直上瞭望臺。當電梯開門的一剎那，她以為會看見至泓在電



梯旁捧著鮮花等待著她，結果環顧四周並沒有看到至泓。雖然有點兒小小的失望，她還是靜靜地走到落地窗前，看著地上已經小得如拇指般的車子和人們。



時間慢慢地流逝，卻不見至泓的身影，慧美心想：「他該不會是忘記了吧?」正在狐疑的時候，她的手機響起熟悉的聲響，這是她為了心愛的至泓所設定的專屬音樂。打開手機蓋，彼端傳來再熟悉不過的聲音：「慧美，請妳再等一下，我有一些事情必須處理一下。」慧美顯得有些恚怒地應著：「我再給你十分鐘的時間，你如果還不出現，我就要離開了!」說罷就將電話掛上。過了十分鐘之後，至泓仍然沒有出現，慧美心想是否應該再等下去，還是就此離開呢?此時，慧美的手機又再度響起，是至泓的聲音：「慧美，妳不要生氣。我再過一會兒就到了，妳一定要等我喔!」慧美掩蓋不了自己的怒氣，大聲說道：「你如果重視我的話，就不會讓我等這麼久。既然你讓我等這麼久，那就表示你一點兒都不重視我，我才不要等你，我這就搭車回家。」慧美氣沖沖地掛了電話，眼淚不由自主地滴在落地窗前的欄杆，她越來越覺得她的想法是對的，至泓已經不重視她的感受了。於是她下定決心，走到電梯口離開這個地方。

當電梯到達地下室的出口，開門的時候。迎面而來的是



一束玫瑰花和至泓滿著雙頰的笑意，努著嘴的慧美這時也鬆了嘴角。她問至泓：「你是不是不重視我了，為什麼讓我等這麼久?」至泓對慧美說：「親愛的，我並不是不重視妳，讓妳等那麼久並不能證明我不重視妳。」慧美聽到至泓這麼說，剛剛的情緒又升了上來：「你就是不重視我，才會讓我等那麼久。因為如果你重視我，就會先到瞭望臺等我，而不是讓我等你。」至泓不知道該怎麼回答，只好顧左右而言他，



趕快將玫瑰花塞到慧美的手中，並且對慧美說：「親愛的，我錯了。請妳原諒我！可是妳要相信我，雖然妳等我很久，可是我真的很重視妳。雖然我不知道該怎麼說妳才會明白，可是我真的很重視妳。對不起啦！」

其實在這幾年的相處中，慧美早就覺得至泓深愛著自己，只是為什麼以前的他總是會先到約會的地點等著她，而現在卻要她痴痴地等著他等得這麼生氣。她努著嘴跟著至泓走到停在大樓旁的機車，坐上了機車和至泓在臺北市的街道上穿梭著。慧美突然間對至泓說道：「我想回家，你載我回去吧！」至泓詫異地將機車停在路邊，不敢置信地說：「妳真的生氣了，要回家了嗎?我說我很重視妳，妳不相信嗎?」慧美搖了搖頭。至泓突然靈光一閃，對慧美說：「我問妳說妳『不相信』我很重視妳?而妳搖頭就表示妳『相信』



我很重視妳，所以妳原諒我了。」慧美其實是表示她覺得他已經不重視她了，於是她對至泓說：「才不是呢！你再重問一遍。」至泓早在心裡打好了主意，就對慧美說：「好！我再重說一遍，我問妳『妳真的生氣了，要回家了嗎？我說我很重視妳，妳不相信嗎？』」慧美有了剛剛的經驗，



這次她點了點頭。至泓很高興地對慧美說：「我就知道妳點頭表示妳堅定地『相信』我很重視妳。」慧美也被至泓弄得破涕為笑，可是她卻百思不得其解，那不管我點頭或是搖頭都表示相信他很重視我，真是太奇怪了。慧美問至泓這是怎麼一回事？至泓只是微笑著說道：「這只是一個論證的技巧罷了。」慧美覺得十分有趣，將手環著至泓的頸子說：「你得教教我，不然我可真的不原諒你喔！」至泓哪會拒絕呢，當下就答應了慧美，兩個人愉快地去享用遲來的午餐。

日常生活中的對話，往往隱藏著許多有趣的情節。例如在故事中的慧美，會利用某些論證來支持「至泓已不再重視我」的想法。在這個層次上，我們可以發現人類在思考的時候，也是利用論證的形式來檢驗自己的想法。然而，學習論證技巧的好處遠不止於此，在故事中，

至泓更利用了論證的小技巧，讓慧美無論點頭或搖頭都變成支持「慧美相信至泓非常重視她！」的結論。

至泓所設計的論證形式，通常被稱為雙刀論證。在日常生活中最常見的雙刀論證的說法就是不見不散。想想看，如果你對朋友說不見不散時，真正的論證形式是什麼呢？如果把整個論證寫出來，其實你的論證是——前提：⑴如果下雨的話，我會在這裡等你。⑵如果不下雨的話，我會在這裡等你。結論：我會在這裡等你。然而，在日常對話中，我們只是省略了這些論證過程，直接將結論說出來而已。所以，只要我們願意反省一下自己說話的論證過程，其實就能發現許多樂趣。也更能了解其他人為什麼會這麼說的原因。

在這個篇章中，我們將會看到的是如何將日常生活中的這些論證，用比較簡易的形式表達出來。在設計用來表達論證的工具時，應該怎樣設計才是比較適當的。

什麼是論證

在日常生活中，我們的大腦進行著複雜的思維程序，並利用語言和行動達到溝通的目的。雖然大腦的運作十分複雜，但是拜邏輯的發展之賜，使得我們可以透過邏輯的學



習，逐步分析大腦的思考規則。接下來，就讓我們揭開思考的神祕面紗。想要解開大腦思考的祕密，首要之務就是了解論證 (argument) 的概念。

什麼是論證呢？舉例來說，如果有人問你：「為什麼月球總是以同一面朝向地球？」你會用一籮筐的句子來說明其理由，也就是說，當你要解釋「月球總是以同一面朝向地球」這個句子時，必須用一堆句子來說明，而這些句子的組合就是一個論證。所以簡單來說，論證就是「一群語句的集合」，在這群語句中，有一句話被當作結論 (conclusion)，而其餘的都是作為前提 (premises)，用來支持結論的句子。因此，我們可以說，論證是由前提和結論構成的。

也許有人會擔心，如果在一組句子中，結論不只一個該怎麼辦？通常這種情形發生的時候，論證有主要結論和次要結論二部分。而次要結論通常是用來支持主要結論的理由，所以只要把整組句子所構成的論證，分解成許多小論證就可以了。在每一個小論證中，會有一個次要結論，而整個論證會有一個主要結論。就像數學考試的時候，把複雜的問題，分解成一個個比較簡單的小問題，然後經由逐步的處理，最後可以得到解答。

同樣地，在學習處理論證時，一開始就從非常複雜的論證著手，並不是明智之舉。應該先學習如何處理簡單的論證，再學習如何將複雜的論證分解成簡單的論證。如此一來，要分析複雜的論證自然就不成問題了。

了解什麼是論證之後，我們可以利用容易理解的結構形式來處理論證。回憶一下我們曾經處理過由 S_3：「這顆球是圓形的而且這顆球是紅色的」，推論出 S_2：「這顆球是圓形的」的結論。

(A1)（前提）這顆球是圓形的　而且　這顆球是紅色的
（結論）　　　　　所以，這顆球是圓形的



(A1) 就是一個論證，在一個論證中，前提寫在橫線上方，用來表示支持結論的理由。結論則寫在橫線下方。至於橫線，則用來表示推論過程，也就是經由上方作為理由的前提，試圖得到橫線下方的結論。

反過來說，如果某個人試圖以 S_2 作為理由，想要得到 S_3 的結論。那麼他的論證就會是 (A2) 的形式。

(A2)　　　　　這顆球是圓形的
所以，這顆球是圓的　而且　這顆球是紅色的



對照一下這兩個論證。從直覺上來看，我們會認為 (A1) 的推論符合正確的思考規則，因為在接受前提的情況下，不可能不接受結論。由於 (A1) 符合正確的思考規則，所以我們說 (A1) 是一個有效論證 (valid argument)。但是，(A2) 的推論過程則不然。因為即使接受 (A2) 的前提，也不見得會接受 (A2) 的結論。也就是說 (A2) 並不符合正確的思考規則。因此，我們將 (A2) 稱為無效論證 (invalid argument)。



經由這兩個論證的對照，可知在說明論證時必須將前提和結論標示清楚，才能據以檢視此論證是否為有效論證。當然這也就是為什麼要刻意地介紹論證結構的原因。否則，如果連理由（前提）和主張（結論）都搞不清楚，說起話來豈不是一團亂？

在 (A1) 和 (A2) 的比較下，可以發現原來是有效論證 (A1)，把前提跟結論換過來之後，就變成了無效論證(A2)。那麼是不是只要將前提和結論對調之後，有效與無效的論證結果也跟著改變呢？讓我們用下列的例子來看這兩者的關係。

(A3)　這顆球是圓的　或者　這顆球是紅色的

所以，這顆球是圓形的



(A4)　這顆球是圓形的

所以，這顆球是圓的　或者　這顆球是紅色的



(A5)　如果你愛我，那麼你一定會珍惜我

所以，如果你不珍惜我，那麼你一定不愛我



(A6)　如果你不珍惜我，那麼你一定不愛我

所以，如果你愛我，那麼你一定會珍惜我



(A7)　101 大樓是世界第一高樓

所以，高速公路限速是每小時 100 公里



(A8)　高速公路限速是每小時 100 公里

所以，101 大樓是世界第一高樓



從上面的例子看來，前提與結論的對調，和該論證是否為有效論證之間，並沒有必然關係。然而，截至目前為止，我們都是根據直覺判斷某個論證是否為有效論證。但是單憑直覺就可以判斷出所有的推論嗎？如果單憑直覺就可以判斷所有的論證，那麼人類就不會有爭執了，因為每個人都使用相同的規則，也意識到他所用的規則。很可惜大部分的人並不知道正確的思考規則，誤以為自己所用的規則是正確的，才會導致許多不必要的衝突。所以，為了避免這樣的情況一再發生，我們有必要對正確的思考規則作系統化的處理，這樣才能在衝突產生時，彼此都有共同而正確的規則檢驗雙方的說法。

論證的蘊涵關係

從先前的例子中，不難發現單憑直覺不足以判斷某個論證是有效論證或無效論證。因此，我們需要一個足以用來判斷某個論證是否為有效論證的方法，也就是對有效論證下定義。因此，我們將「有效論證」定義為，在論證所有的前提皆真的情況下，結論一定為真。換言之，當你認定某個論證是有效論證時，意思就是當你肯定該論證的前提都成立時，你百分之百會同意結論成立。

在邏輯系統中，通常把論證中前提和結論之間的關係，稱為蘊涵關係 (entailment relation)。有效論證的意思就是前



提蘊涵結論，而無效論證的意思當然就是前提不蘊涵結論。換言之，前提和結論之間蘊涵關係成立的，就是有效論證；反之，蘊涵關係不成立的，則是無效論證。因此，我們將蘊涵關係定義為：「在所有前提成立的情況下，結論不可能不成立」。回頭想想前面提過的論證，如果一個論證是有效論證，那麼當你肯定前提是真的時候，是否無可避免一定要接受結論是真的呢？答案當然是肯定的。因此，我們可以用上述的定義來檢視某個論證是否為有效論證。

⑴結論隱藏在前提中的蘊涵關係

由於蘊涵關係成立的論證稱為有效論證，意思是說結論可以經由前提推導而得，所以只要分析前提的內容，就可以得到結論的內容。換言之，結論其實已經隱藏在前提中，有效論證只是將這個特點顯示出來罷了。不過，對於比較簡單的論證而言，理解前提和結論之間的蘊涵關係並不是什麼難事。可是對複雜點兒的論證來說，就必須花費一些功夫，才能清楚地顯示前提和結論之間的蘊涵關係。

(A9)　（前提一）所有的人都有母親
　　　（前提二）　秦始皇是人
　　　――――――――――――――
　　　（結論）所以，秦始皇有母親



以論證 (A9) 而言，結論「秦始皇有母親」並未出現在

前提中，前提怎麼會蘊涵 (entail) 結論的內容呢？其實，只要稍微改變前提的描述方式，就可以很簡單地理解為什麼前提會蘊涵結論了。論證 (A9) 的第一個前提是「所有的人都有母親」，這個前提可以改寫成：

（甲是人，甲有母親）而且
（乙是人，乙有母親）而且
（丙是人，丙有母親）而且………………。

「秦始皇是人，秦始皇有母親」

很顯然地，我們不會傻到去寫出所有的人，因為實在太多了。不過，可以肯定的是，在改寫後的前提中，有一段是「秦始皇是人，秦始皇有母親」。不僅如此，在確定整句話中包含「秦始皇是人，秦始皇有母親」這一段之前，還必須先肯定「秦始皇是人」。而 (A9) 的第二個前提所陳述的內容就是「秦始皇是人」。所以，對論證 (A9) 而言，之所以是一個有效論證，是因為前提蘊涵結論。也就是說，前提的內容中已經擁有結論的內容。

⑵結論沒有隱藏在前提中的蘊涵關係

按照蘊涵關係的說明，如果某個論證是有效論證，那麼前提的內容已經包含了結論的內容。可是我們會發現，根據有效論證的定義，有些論證的前提，根本沒有關於結論的任何訊息，卻還是有效論證！對於這類論證，我們仍然可以用



蘊涵關係看待前提和結論的關係嗎?

(A10)　　你是男生　而且　你不是男生　**有效**

所以,牆壁是白的

在論證 (A10) 的前提的內容中,並沒有出現關於結論的任何內容,可是根據有效論證的定義,論證 (A10) 是一個有效論證,因為在前提為真的情況下,結論一定為真。為什麼呢? 太奇怪了吧! 其實仔細想想,倒也不離譜。看看前提:「你是男生而且你不是男生」這句話本身不就是矛盾的嗎? 沒錯,這是一句矛盾句。既然論證 (A10) 的前提根本不可能是真的,所以不管結論是真或假,我們都找不到「前提皆真,而結論為假」的情況。換言之,不管結論的真假或者結論的內容是什麼,都不影響認定 (A10) 是一個有效論證。另外換個角度來說,如果連矛盾的語句,你都可以認定它成立了,還有什麼語句是不成立的呢? 或者是說,如果連矛盾的語句都是真的,那還有什麼語句會是假的呢? 因此,我們可以得到一個結論,就是當前提彼此之間有矛盾的情況出現時,該論證一定是有效論證。

從論證到邏輯形式

經過了前面的說明之後,不難理解在日常生活中使用的論證多如牛毛。所以,為了能夠達到可以利用簡潔易懂的

方法檢視這些論證，我們必須想辦法將論證加以簡化。

首先，仔細想想，當我們說一句話的時候，我們希望藉由語句傳達的是什麼呢？毫無疑問我們希望藉由語句傳達某些意義。換言之，當我想要和你溝通的時候，並不是只輸入某些符號給你，而是希望你藉由語句領悟我所想要傳達的意義。所以，被研究的對象是語句的內容（語句的意義），而不是組成語句的那些符號。既然如此，我們應該把語句的內容和組成語句的那些符號區分開來。雖然許多人都知道，語言用來傳達某些內容或意義，而對方所理解的正是這些內容或意義，可是除了使用語句之外，怎麼表示語句的內容呢？為了和組成語句的符號有所區分，哲學家們就將語句的內容稱為命題 (proposition)，而邏輯所要處理的對象就是命題，而不是組成語句的那些符號。

為了能夠清楚地理解語句和命題之間的區別，我們可以經由下列的例子來了解。

S_1: “This is a book”
S_2:「這是一本書」

從組成語句的符號的觀點來看，S_1 和 S_2 當然是不一樣的符號，因為 S_1 是一串英文字母的符號，而 S_2 是一串中文符號，所以 S_1 和 S_2 是不同的語句。因此，對於只學過中文，但是對英文毫無所悉的人而言，根本無法理解 S_1 這一串符號是什麼意思。



但是，如果從語句的內容的觀點來看，情況會大不相同。對學過中文和英文的人而言，會認為 S_1 所要傳達的意思，和使用 S_2 所要傳達的意思是一樣的。因此，即使 S_1 和 S_2 是由不同的符號所構成，卻表達相同的內容。而在推論過程中，我們所在意的正是語句的內容（命題）之間的關係，不是組成語句的符號。像 S_1 和 S_2 雖然符號不同，但卻表達相同的意義（相同的內容），也就是同一個命題。

命題在邏輯系統中的角色，就像象棋遊戲中棋子所代表的意義一樣。如果某人手上拿了一堆棋子，卻不知道棋子在某個遊戲中所代表的意義，那麼他顯然無法跟別人下棋。而區分組成語句的符號和語句的內容，就像區分棋子和棋子所代表的意義一樣，如果某人只看到一堆符號，而不了解符號所代表的意義，那麼他就無法和別人溝通了。

對於符號和符號所代表的意義之間的關聯，有個狀況值得探討一下——雖然全世界各個地區有不同的語言和文字，但全世界使用的數學符號卻是相同的。不可否認地，數

命題 (proposition)

命題的備受爭議之處，在於它是一種抽象實體 (abstract entity)。對於抽象實體是否真的存在的課題，引發了哲學中實在論 (realism)—反實在論 (anti-realism) 的爭論。

對於抽象實體的理解，不妨想想數字或者小說中的人物。對實在論者而言，所面臨的挑戰為——必須對「抽象實體是一種什麼樣的存在形式?」這個問題，提出適當的說明。另一方面，反實在論者所要積極面對的問題則是——如果沒有抽象實體，如何能夠理解「語言的意義」?

學符號的流通，造就了莫大的便利。只要學過數學的人，都能夠進行良好的溝通。比如說你到某個觀光地點買東西，即使在你不知道當地的語言怎麼說，而對方又不會講中文的情況下，至少可以用寫數字的方式，告訴對方你希望買到的價錢，而對方也可以用寫數字的方式，表達他希望賣出的價錢。我們怎麼有把握利用寫數字的方式可以達到良好的溝通呢？很顯然地，我們是預設所有的人對於數字所代表的意義的想法是相同的。所以，雖然每個區域都有不同的語言文字，卻因為使用相同的數學符號，使人類在處理與數學相關問題上，得到十分可觀的結果。

有鑑於數學的成功經驗，邏輯也採取了相同的策略。既然邏輯要處理的對象是命題，而不是組成語句的符號，那麼同一個命題不管用哪一種文字符號表示，都是表達相同的內容。因此，為了能夠表達這些命題，我們就用一些符號 (p, q, r...) 來代表，並將這些代表符號稱為命題符號 (propositional letters)。接下來，用這些命題符號來代替論證中提到的句子。

(A1)　這顆球是圓形的　而且　這顆球是紅色的

所以，這顆球是圓形的

將論證 (A1) 中的語句表達的內容（命題），用命題符號代入，(A1) 就可以寫成 (A1′)：



p：這顆球是圓形的
q：這顆球是紅色的

(A1′)

p 而且 q
所以，p

(A1′) 看起來是不是簡單多了！而且就算 p 或 q 所代表的內容改變了，(A1′) 仍然還會是有效論證喔！例如：

p：今天下大雨
q：我沒有帶雨傘

(A1″)

今天下大雨 而且 我沒有帶雨傘
所以，今天下大雨

從上述三個論證的比較中可以發現，(A1′) 是 (A1) 和論證 (A1″) 的共同形式。因為從 (A1′) 來看，如果 p 代表「這顆球是圓形的」，而 q 代表「這顆球是紅色的」，就會是(A1)。另一方面，如果 p 代表「今天下大雨」，而 q 代表「我沒有帶雨傘」，代入 (A1′) 中的 p、q 的位置，就會是 (A1″)。由於 (A1′) 中的 p、q 可以代入任何命題，因此 (A1′) 稱為 (A1) 和 (A1″) 的共同形式。(A1′) 顯然是一種有效論證形式 (valid argument form)，因為從 (A1) 和 (A1″) 來看，不管命題符號 p 或命題符號 q 代表的內容是什麼，都不會影響此論證是個有效論證。這麼一來，我們只要整理出哪些論證形式是有效論證即可，因此，我們可以將邏輯視為研究這種共同形式的學科。換言之，邏輯的目標就是找到哪些論證形式是有效論

證，而哪些又是無效論證。除此之外，我們還會得到一個重要的結論：一個有效論證形式，不管命題符號所代表的內容是什麼，都不會使該論證變成無效論證。

語句連接詞

以命題符號表示語句的內容，可以說達到初步簡化的要求。將論證的組成分子以符號代入，就稱為形式化 (formalization)，為什麼需要將論證形式化呢？簡單地說，因為每一個論證形式，如論證 (A1′)，都有許多個例，如論證 (A1) 和 (A1″)。由於 (A1′) 是 (A1) 和 (A1″) 共同的論證形式，當我們確定 (A1′) 這種論證形式是有效論證，就可以確定 (A1) 和 (A1″) 也一定是有效論證。因此，將論證形式化可使我們更容易整理哪些論證是有效論證。

用命題符號表示語句的內容是初步的簡化工作，接下來，我們要處理連接命題的連接詞 (connectives)，例如「而且」(and)、「或者」(or)。

先分析連接詞所扮演的角色！想想看，在平常的對話場合中，使用連接詞的目的是什麼呢？假設有個人說：「這是一朵紅色的玫瑰花」。那麼，這句話顯然等同於：「這是一朵玫瑰花『而且』是紅色的花」。換言之，說這句話的目的是強調這朵花同時具備兩種性質，從這個觀點來看，「而且」這個連接詞的意義是：「在使用『而且』連接的兩個命題均



為真的情況下，整個語句為真，其餘情況整句話為假」。

那麼，「或者」的意義又是什麼呢？假設有人說了這麼一句話：「這是一朵玫瑰花『或者』是紅色的花」。在什麼情況下我們會認為他說的是真話呢？顯然只要「這朵花是玫瑰」和「這朵花是紅色的」這兩句話，其中有一句是真話就代表他說的是真話。因此，「或者」這個連接詞的意義是：「在使用『或者』連接的兩個命題均為假的情況下，整個語句為假，其餘情況整句話為真」。

經由上述的說明，可以看得出來連接詞的作用。連接詞在整個語句中扮演的角色就像處理器，將輸入的資料，經過處理之後，變成輸出的資料。以 (A1′) 為例，當 p 和 q 兩命題的真假值 (truth-value) 狀況是（真，真）時，那麼整個論證所輸出的真假值就是（真）。而當輸入的資料是（真，假）或（假，真）或（假，假）時，輸出的真假值就是（假）。換言之，如果兩個命題中有一個真假值為假，那麼整個語句為假（以 “T” 代表真，以 “F” 代表假）。在邏輯系統中，具備這樣的處理器特色的符號就稱為函項 (function)。

幸運地，邏輯學家已經為大家整理出五個基本函項，有了它們，就可以定義其他的函項。所以認識這些基本函項的意義，是非常重要的哦！這些基本函項（連接詞）的意義，可以藉由真值表顯示出來：

函項 (function)

函項是指兩個集合中元素的關係。設想兩個集合 A 和 B，將集合 A 中的元素，通過函項 (f) 的操作，可以在集合 B 中找到相對應的元素（寫成 f: A→B）。集合 A 稱之為定義域，而集合 B 則稱為值域。而函項 (f) 的特性是對於集合 A 中的任一元素 a 而言，在集合 B 中只有唯一的元素 b 與 a 對應（寫成 f(a)=b）。

函項上的完備 (functionally complete)

此處的函項上的完備，是針對真值函項所形成的類而言。意即如果所有的真值函項，都能由某個集合中的真值函項表達，則此集合稱為函項上的完備。舉例來說，{¬、∧、∨、→、↔}, {¬、∧、∨}, {¬、→} 都是函項上完備的。

1. ¬（非。not）：否定的意思。當 p 為真時，¬p 就為假；而當 p 為假時，¬p 就為真。

p	¬p
T	F
F	T

2. ∧（而且。and）：只有當 p 和 q 同時為真時，(p∧q) 才為真，其餘情況 (p∧q) 為假。

p	q	(p∧q)
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. ∨（或者。or）：只有當 p 和 q 同時為假時，(p∨q) 才為假，其餘情況 (p∨q) 為真。

p	q	(p∨q)
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. →（如果……則……。If..., then...）：只有當 p 為真，q 為假的情況，(p→q) 才為假，其餘情況 (p→q) 為真。

p	q	(p→q)
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

5. ↔（若且唯若。If and only if）：當 p 和 q 的真假值相同時，(p↔q) 為真，否則為假。

p	q	(p↔q)
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

對於 ¬、∧、∨ 三個函項的意義，相信對讀者來說不難掌握。但是 → 和 ↔ 兩個函項雖然也常用，卻比較容易使人困惑，因此需要再作說明。

假設某個人說：「如果玻璃杯掉在地上，則它會破。」在什麼情況下我們會認定這個人說的話為假？要證明這個人說的是真還是假，只要讓玻璃杯掉在地上，如果破掉了就證明他說的是真的，如果不會破，那他說的話就是假的。所以，當我們認定 (p→q) 為假，意思就是我們認定 p 為真而 q 為假的情況發生的時候。

對於 ↔ 函項，其實我們也不陌生，只是需要想想而已。假設某個人說：「有葉綠素的葉子一定是綠色的，反之亦然，綠色的葉子一定含有葉綠素。」這句話可以改寫成：「如果葉子含有葉綠素，則它是綠色的，而且如果葉子是綠色的，則它含有葉綠素。」也就是「葉子含有葉綠素，若且唯若，葉子是綠色的。」在什麼情況下，這個人說的話是假的呢？如果我們發現某片紅色的葉子中含有葉綠素 (p 真 q 假)，或者是某片綠色的葉子中不含葉綠素 (p 假 q 真) 時，那麼這個人說的話為假。換言之，(p↔q) 為真的意思就是 p 和 q 同時為真或者同時為假。



本章小結

讀完本章之後，各位讀者是否想要快速地重溫舊夢一下呢？讓我盡最大努力幫助各位迅速地將腦袋的新東西整理一下，相信對接下來的閱讀更有幫助喔！為了讓讀者們一目瞭然，在往後各章中，我將採取條列的方式呈現這些重要概念。

◆ 論證：一群語句的集合，其中一句為結論，其餘為前提。

◆ 蘊涵關係：某論證蘊涵關係成立，意謂論證前提可導出結論。

◆ 邏輯形式：利用邏輯符號取代語句和連接詞所形成的論證形式。

◆ 真值函項：具真假值的語句通過函項處理後，仍具有確定的真假值，此函項即為真值函項，如 ~、∧、∨、→、↔。

這些概念可以說是進入邏輯的門檻，每個學科都會建立嚴謹的概念內容，邏輯自然也不例外，所以我希望從日常的談話內容說明這些概念的意義，希望能讓讀者們更容易體會這些概念的用處。



語句邏輯語言及語意學

在英文課的課堂上，浩穎正埋頭寫著期末考的試題。因為夏天的來臨，浩穎寫得滿頭大汗，他心裡知道這學期的英文成績岌岌可危，因為前陣子迷上了「天堂」，每天都把時間花費在得到寶物上，看到英文就隨手一丟。等到了期末考前，才驚覺自己已經荒廢過久，趕緊把課本拿來惡補一番。



可是蒼天無情，他看著英文課本，心裡卻有一陣淒涼的感覺，因為光是字彙他就背不起來了，更何況還有片語、佳句，甚至有不知道東西南北的閱讀測驗。考試時間一如流水般過去了，浩穎不得不交出他極不願意交的試卷，低著頭走出了教室。

「喂！浩穎，等等我。」雲奇是浩穎的死黨，兩個人總是每天交換著所有瑣碎的心事。「浩穎，怎麼樣，考得還好嗎?」浩穎低著頭，一臉垂頭喪氣地輕輕搖著頭說：「真的很誇張耶，雲奇。英文字母只有 26 個，不是嗎？為什麼組合起來有這麼多字彙？這不是折磨人嗎？我最近玩線上遊戲玩得太瘋了，都沒時間好好準備，看來前途無『亮』啊！」雲奇一臉不知道該如何是好的表情，想安慰浩穎又不知道該說些什麼，想責備他應該考試前要收收心準備期末考試，好像又時機不對。想想只好順著浩穎的話說道：「其實你說得很有道理，英文字母也不過才 26 個，可是一組合起來真是



不得了，英文字彙多如牛毛，要把英文字彙都背下來，對我們來說真是一種酷刑。」

浩穎聽著雲奇這麼說，心想雲奇不愧是他的死黨，這麼了解他。於是他也樂得繼續發牢騷：「對啊！你看看，英文字母雖然很少，可是組成的字彙這麼多，我們怎麼能夠全部記得清楚。更何況，我覺得我對英文字彙有很大的障礙，因為我總是覺得我只能看到英文字母的樣子，卻無法了解這些字母組合之後的意思是什麼?」浩穎舒了口氣，繼續說著：「所以，你看看。我其實都是硬背的，好辛苦喔！以前字彙的數量不多還應付得來，現在數量一多我就舉白旗投降了，想了想還不如去打打線上遊戲，反正唸了也不會。」

雲奇聽著浩穎訴苦，心裡想著字母很少卻可以組合成許多字彙的確是一件奇怪的事。他想到坊間有許多參考書籍教人如何將字彙背熟，既然浩穎覺得這麼難，是否應該介紹他想個辦法克服這個困難呢？否則的話會很慘，萬一浩穎考不上好的大學，不但自己的信心受挫，也增加家裡的負擔。雲奇想著想著想出了神，一旁的浩穎看著好笑，搖了搖雲奇：「喂！你的靈魂失蹤了喔，呆成這副樣子，超爆的。」雲奇知道他剛剛的確想出了神，自己也覺得好笑地對著浩穎說道：「沒什麼啦，我剛剛只是在想你說的很有道理，可是我想不通道理在哪裡。我在想，既然你覺得背單字很難，那麼我是不是應該幫你想辦法找些容易背的方法，讓你不必背得這麼痛苦。」

「喔！雲奇，別。你的好意我可心領了，你應該去瞧瞧我的書架上的『祕笈』有多少，可是說真格的沒啥用處。每一本書的作者都說自己的方法好用，可是我就是沒辦法消受，因為他們說的規則實在用處不大。我何嘗不知道字首字根的變化會產生不同的詞性，可是你瞧瞧，所有的規則都是例外一大堆，又不是所有的字彙都按規則來。我怎麼知道哪些按規則來，哪些又不按規則呢？」雲奇聽浩穎這麼說也覺得有道理，點了點頭表示贊同：「是啊！你說得沒錯。英文字彙的確沒什麼固定的規則可言，難怪你背得這麼頭痛。我雖然把英文字彙背下來了，可是好像也是硬背的，想不出有什麼規則可言。」浩穎聽著雲奇這麼說，恨不得把牢騷底兒一股腦兒全給搬了出來！「更可惡的是那些英文字母組合起來，就像一堆蚯蚓爬來爬去的，誰知道英國人腦袋裡怎麼想的，居然可以用這些東西來溝通，你說怪不怪？」雲奇突然間好像被不知名的雷給打中了一樣，整個腦袋突然間九級大地震。是啊！英文字母組合起來怎麼可以用來溝通呢？外國人怎麼能夠了解這些字彙的意思呢？而我們在學英文的





時候，為什麼不能一眼就看出字彙的意思呢？難道外國人有超能力，可以透視字彙裡面的意思，而我們卻不行嗎？想著想著雲奇又想出了神，呆呆地望著天空。

浩穎看著雲奇又不對勁兒了，搖著雲奇說：「你嘛幫幫忙，考不好的是我，又不是你。你幹嘛弄得好像我在安慰你一樣。真的太好笑了吧。」雲奇靦腆地笑著說：「不好意思，我不是故意的。我只是覺得你剛剛說的讓我的腦袋發生九級大地震。」浩穎一臉驚訝地說道：「什麼，我的氣功練到這種地步，隨便講兩句話，你的腦袋就來個九級大地震了。太厲害了，呵呵呵！不過說真格的，到底怎麼回事啊？」

「也沒什麼啦，我只是想到你說那些英文字母排起來，我們都知道是哪些個字母，可是有些人知道排起來的意思，有些人卻不知道。這件事是不是有點兒奇怪？」雲奇一臉正經地說著。浩穎也開始疑惑起來，沒想到自己隨口一句話惹出了這麼大的問題。仔細想想雲奇說的好像有點兒道理，怎麼字母擺在那兒我卻不知道它們組合起來的意思是什麼呢？所以對我來說，英文字彙只不過是一堆英文字母而已，可是外國人卻知道字彙的意義是什麼。這可是非常奇怪的，我還以為字母就是字母而已，沒什麼了不起。看來還有很多問題我還不太清楚的。





「那……，雲奇！你知不知道是怎麼回事啊？照你剛剛說的，字母好像不僅僅是字母而已，是不是還有一些看不見的東西藏在字母裡面？不然的話我們怎麼會知道由字母組成的字彙是什麼意思呢？」在浩穎心中，早就忘記了期末考試的情緒，只是好奇地問著雲奇。雲奇被浩穎這麼一問，卻也不知道該如何回答。

相信每個人都有學習某個新學科的經驗。從邏輯的學習中，我們可以了解，不管是什麼學科，都必須熟悉該學科使用的符號。例如數學、英文、物理、化學等等。而本篇故事就是以英文作為引子，讓讀者可以了解到雖然英文的符號（只有 26 個字母）不多，卻可以拼出許多字彙和句子。為了了解這些字彙和句子是如何構成的，代表著什麼意義，英文無疑地是一個專門學科，也有許多人投身於英語語言的研究工作。

在本篇故事中，說明研究英文這個語言並不是件簡



單事，或者更普遍地說，研究任何一個語言都不是簡單的事。因為不但要熟悉該語言的構成規則，更要研究語言的意義等等問題。進一步想想看，每個學科是否都有其獨特的語言？例如數學、物理、化學等。什麼是某個學科的語言呢？簡單來說，就是某個學科所使用的符號，以及如何處理這些符號的規則。所以，邏輯系統自然也不能免俗地需要其獨有的語言。

光有符號還不夠，因為我們的目的是利用符號說明某些意義。就像英文字彙一樣，由一些字母組合起來的單字，可以說是用來表示某種意義。而在邏輯系統中，同樣地要說明這些符號的意義。所以，在接下來的內容，將會介紹語句邏輯所需要的語言是什麼，以及如何利用這些符號的意義，說明什麼是有效論證。

語句邏輯語言

俗話說得好：「工欲善其事，必先利其器」。人們平常說的話，雖然是句句分明，但總不如棋子一般具體可見，因此，採用符號 p、q、r 來代替命題，是不得不的作法。而這些符號如何排列，才能成為有意義的語句，也是不容忽視的。從上述的故事可以了解，如果你看到一個英文字彙是：

chkgtvs，你一定可以一眼看穿這不是一個英文字彙。為什麼呢？因為這個英文字的排列均由子音組成，所以不符合英文字彙發音的規則。你甚至不需要查字典，也可以斷定沒有這個英文字彙。同樣地，在邏輯中也有符號和排列的規則，是必須搞清楚的。

讓我們回到邏輯的問題。顯然，我們已經知道邏輯要處理的是：確定哪些論證形式是有效論證。截至目前為止，已經知道我們需要代表命題的命題符號，以及連接命題符號的連接詞，只要再加上輔助符號 (,) 就可以用來處理由命題組成的邏輯系統。除了命題符號和連接詞之外，還需要加入輔助符號（即括號），因為輔助符號能夠幫助我們，分清楚處理的先後順序。由於這些符號所處理的對象就是命題，所以這個邏輯系統被稱為命題邏輯 (propositional logic)。不過，有些哲學家認為這個邏輯系統處理的對象是語句而不是命題，因此將這些系統稱為語句邏輯 (sentential logic)。我們不需要特別關心這些爭論的細節，我們只需要知道，有些人這麼用，有些人那麼用，這樣就足夠了。

用來描述語句邏輯的符號，僅有下列三種：

1. 命題符號：p、q、r...
2. 連接詞：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$
3. 輔助符號：(,)

這些符號必須經過適當的排列，才是能夠理解的語句。



就拿大夥兒都熟悉的數學來看，如果題目是：「23+43=?」，大家都可以一眼看出答案就是 66。可是，如果題目變成：「+=43?」，我們會不知所云，也就是說根本沒有人知道這個問題在問什麼。原因出在哪裡呢? 其實很簡單，原因就在於我們學習的四則運算中，「+=43?」這種式子是不合法的、不合規則的。換言之，雖然這些符號都是四則運算中的符號，可是組合方式並不符合四則運算的規則，因此，學過四則運算的人根本不會同意這是一個四則運算的式子。

不過，在學習四則運算的時候，老師是否曾經清楚地介紹合法式子的規則呢? 事實上，並沒有。可是，對號稱學過邏輯的人來說，如果連合法的邏輯語句規則都不知道的話，那就真的鬧笑話了。

為了簡單起見，我們把合法的邏輯語句規則簡稱為形構規則 (formation rules)。這些規則的意義是，經由這些規則形成的語句就是合法的邏輯語句，若不按照規則，當然就是不合法的邏輯語句啦! 了解這些規則，你才具備成為邏輯高手的資格喔! 語句邏輯的形構規則如下：

(i)每一個命題符號都是合法的語句。

(ii)如果 φ 是一個語句，那麼 $\neg\varphi$ 也是一個合法的語句。

(iii)如果 φ 和 ψ 都是語句，那麼 $(\varphi\wedge\psi)$、$(\varphi\vee\psi)$、$(\varphi\rightarrow\psi)$、$(\varphi\leftrightarrow\psi)$ 都是合法的語句。

(ⅳ)除了(ⅰ)－(ⅲ)所表示的之外，沒有其他的合法語句。

為了避免困擾，必須花點兒篇幅說明這些規則的意思。

首先，會令人感到奇怪的是，在語句邏輯的符號中，並沒有 φ 和 ψ，為什麼會在這裡冒出來呢？其實，在這裡用 φ 和 ψ 這樣的符號是很有深意的。φ 和 ψ 代表語句圖示 (sentential schema)，意思是：在這個符號出現的位置上，可以代入任何的邏輯語句。

然而，令人好奇的是，在形構規則中，為什麼不直接用命題符號，而要用語句圖示的符號呢？原因就在於命題只是合法的邏輯語句中的一小部分，但是，φ 和 ψ 的任務是要表示任何合法的邏輯語句都可以放在符號出現的位置。

這些規則的好處是，我們可以通過遞歸 (recursive) 的程序，把合法的邏輯語句一一表示出來。什麼是遞歸程序呢？舉個例子來說，軍隊中的長官要確定所有士兵都是男生的話，他只要發出這樣的命令：(1)排在第一個的是男生，(2)男生的後面只能排男生。那麼當所有的人都按照規則排在隊伍中時，長官就可以確定整排隊伍都是男生。按照這類程

遞歸 (recursive)

形式邏輯與數學上的術語，用於定義與函項。遞歸定義要求兩個條件：(1)明確地規定應用於某個序列的首項；(2)對任何後繼項，都借助該項先前的序列決定之。

語句邏輯的語句，可以透過這種方式決定。因此，將語句形構規則視為遞歸函項，可以用來說明所有合法的語句所形成的集合。



序運作的就稱之為遞歸程序。所以，邏輯語句也從最簡單的開始，每個命題符號都是語句，在這個層次上，可以把 φ 和 ψ 這兩個符號以命題符號 p, q, r... 等等替代。所以，(p∨q)、(q→r)、¬p 等等，都是經由形構規則所形成的合法的邏輯語句。

接下來，這些合法的邏輯語句，也可以放在 φ 和 ψ 這兩個符號出現的位置。所以，將 φ 當作 (p∨q)，而將 ψ 當作 (q→r)，那麼 ((p∨q)∧(q→r))、((p∨q)∨(q→r))、((p∨q)→(q→r))、((p∨q)↔(q→r)) 也都是經由形構規則所形成的合法的邏輯語句。按照遞歸的程序操作，就可以輕易地決定哪些符號的排列是合法的邏輯語句的，而哪些是不合法的符號排列。例如：((pq→，這是一個不合法的符號排列。

命題符號：p, q, r...



經過形構規則，產生

合法的邏輯語句：

(p∨q)、(q→r)、¬p...



經過形構規則，產生

合法的邏輯語句：

((p∨q)∧(q→r))、((p∨q)∨(q→r))、

((p∨q)→(q→r))、((p∨q)↔(q→r))...

語句邏輯的語意學基本預設

接下來，為各位介紹什麼是語意學 (semantics)。所謂的語意學就是：研究符號的意義的學科。為什麼要研究符號的意義呢？在本章的故事中，我們可以了解符號和符號的意義根本是兩回事。將英文的 26 個字母（符號）記下來，就可以說了解由英文字母組成的字彙或句子意義（符號的意義）了嗎？顯然不行。因此，了解符號或由符號組成之後的語句所代表的意義，是非常重要的。

舉個例子來說，當我用「柯林頓」來稱呼我家那隻狗的時候，我可以宣稱，「柯林頓」的意義就是我家那隻狗。當然許多人都知道美國前總統的名字就是「柯林頓」。依據上述的說法，美國前總統也是「柯林頓」這個字詞的意義。如此說來，「柯林頓」這個字詞，不就有一大堆的意義了嗎？這個問題是因為我們混淆了字詞（符號）和字詞所代表的意義（符號的意義）。換言之，相同的符號，在不同的情況下使用，可能代表不同的意義。

另一方面，我可以幫我的小狗取各種名字。當我高興的時候叫牠──「柯林頓」，不高興的時候叫牠──「布希」，悲傷的時候叫牠──「羅斯福」。雖然我用了不同的字詞，可是都是用來稱呼我家那隻小狗。所以在這個情況下，雖然「柯林頓」、「布希」、「羅斯福」是不同的字詞（符號），卻

代表著相同的意義。

由於在語句邏輯語言中，出現許多符號。因此，說明這些符號的意義當然是非常重要的，而語意學正是研究如何說明這些符號的意義的學問。

現在就讓我們一步一步地探討古典邏輯的語意學。對於古典命題邏輯中出現的符號，有三個重要的語意學上的預設。

1. 二值原則 (principle of bivalence)

在語句邏輯中出現的命題符號所代表的命題，一定有真假值 (truth-value)。換言之，某個命題一定是真，或者是假，我們不能說某個命題同時既真又假。舉例而言，如果我說:「我的車子是紅色的」，這句話一定有真假值，如果我的車子是紅色的，則這句話為真，如果我的車子不是紅色而是白色的，則這句話顯然為假。而且可以肯定的是，我的車子不可能既是紅色的而又不是紅色的，所以不可能既真又假。當然，有人會疑惑，如果我沒有車子的話，這句話是真還是假呢? 為了簡單起見，我們可先採取羅素的立場，將這類語句看成假的，如果讀者有興趣的話，可參考和指涉理論 (theory of reference) 有關的書籍。

2. **外延原則** (principle of extensionality)

在語句邏輯中，一個由許多命題和連接詞組合而成的語句，整個語句的真假值是由個別的命題的真假值決定的。外延原則的精神，就是說明在語句邏輯中，可以透過最簡單的組成成分，亦即命題符號的真假值，逐步地決定整個語句的真假值。假設語句 S_1: $(p \wedge q)$。

- S_1 為真的情況是：p 為真而且 q 為真。換言之，在 p 和 q 均為真的情況下，可以決定 S_1 為真。
- 而在 p 為假但是 q 為真的情況下，可以決定 S_1 為假。

從例子顯示，不管語句是由多少命題或連接詞組合起來（當然是有限個），我們都可以透過這個原則，宣稱該語句具有真假值，而語句的真假值一定可以經由個別命題符號的真假值決定。

3. **真值函項原則** (principle of truth-functionality)

在古典邏輯系統中所要用的連接詞，都是真值函項的連接詞 (truth-functor)。在古典邏輯中，之所以要強調所使用的連接詞必須是真值函項的連接詞（$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$），



原因在於我們希望每個合法的邏輯語句都有真假值。而通過真值函項原則的保證，只要是經由形構規則組成的邏輯語句，一定可以透過該語句中的命題和連接詞，確定語句的真假值。

> 是不是所有的邏輯系統所用的連接詞都是真值函項的連接詞呢？並不盡然！至於如何建立一個邏輯系統處理非真值函項的連接詞，是相當複雜的課題。不過，由於古典邏輯預設了真值函項原則，這些所謂的非真值函項的連接詞，當然就不會出現在古典邏輯中。因此，我們可以暫且把非真值函項的連接詞的問題擱置，專心處理古典邏輯中的真值函項的連接詞即可。

真值表法

到目前為止，可以說對於語句邏輯有了基本的認識——符號、語句、真假值。接下來要面對的問題是：有沒有什麼方法可以用來決定，哪些論證是有效論證，而哪些又不是呢？這個問題說起來容易，做起來可不輕鬆。因為這個方法可不能只是針對某些特別的論證，而是能夠用在任何論證上！很慶幸地，經過邏輯學家的努力，我們找到一個好方法，可以用來決定哪些論證是有效論證，就是真值表法 (truth table method)。

> 真值表法是和語意學觀點結合的方法。從語意學的觀點定義有效論證是：不可能出現前提皆真而結論為假的情況的論證。因此，真值表法的做法，就是設法將前提的真假值和結論的真假值全部列出，然後檢查一下有沒有前提皆真而結論為假的情況出現。有的話，就是無效論證，沒有的話，就是有效論證。

真值表法的概念非常簡單，設法將前提的真假值和結論的真假值全部列出，然後檢查一下有沒有「前提皆真而結論為假」的情況出現。如果有此種情況出現，此論證就是一個無效論證。而在所有可能的情況下，都沒有出現此種情況的話，就是有效論證。自從真值表法出現，邏輯學家才算是真正找到一個*有效程序* (effective procedure) 來決定哪些論證是有效論證。接下來，讓我們逐步地揭開真值表法的奧祕。

首先，我們要知道的是，論證中的命題符號的數目會決定可能情況的數目。根據二值原則的預設，命題的真假值非真即假。因此，每個命題都有兩種可能情況：真和假。當論證中僅出現一個命題符號時，需要考慮的情況有 $2^1=2$ 種（圖(1)）。而論證中出現 2 個不同的命題符號時，需要考慮的情況就變成 $2^2=4$ 種（圖(2)）。依此類推，當論證中出現 3 個不同的命題符號時，需要考慮的情況就變成 $2^3=8$ 種。

	p
情況(1)	T
情況(2)	F

圖(1)

	p	q
情況(1)	T	T
情況(2)	T	F
情況(3)	F	T
情況(4)	F	F

圖(2)

以論證 (A1) 為例：

(A1) 這顆球是圓形的 而且 這顆球是紅色的

所以，這顆球是圓形的

用符號代入，(A1) 變成 (FA1)：

p：這顆球是圓形的
q：這顆球是紅色的
∧：而且

(FA1)

$$\frac{(p \wedge q)}{\therefore p}$$

無疑地，論證形式 (FA1) 是有效論證形式。現在，我們透過真值表法再次確定論證形式 (FA1) 是有效論證形式。步驟如下：

1. 首先，檢查一下論證中的命題符號的數目：有 2 個不同的命題符號，p 和 q。
2. 根據上述的說明，2 個命題符號所組合的可能情況有四種。
3. 根據外延原則和真值函項原則，可以決定每個語句的真假值。作為前提的語句 “(p∧q)” 的真假值可以透過 p

和 q 來決定，而結論 p 的真假值當然就是跟 p 的真假值一樣。

	p	q	前提 $(p \wedge q)$	結論 p
情況(1)	T	T	T	T
情況(2)	T	F	F	T
情況(3)	F	T	F	F
情況(4)	F	F	F	F

圖(3)

4. 接下來的任務就是檢查一下，在 4 種情況中有沒有前提皆真而結論為假的情形出現？顯而易見地，前提皆真的只有情況(1)，而情況(1)中結論為真。所以在 (FA1) 中，沒有前提皆真而結論為假的情況出現。根據語意學中對有效論證的定義，(FA1) 是一個有效論證。

明白真值表法的運作順序了嗎？再來幾個練習吧：

【練習一】

$$\frac{p}{\therefore (p \wedge q)}$$

	p	q	前提 p	結論 $(p \wedge q)$
情況(1)	T	T	T	T
情況(2)	T	F	T	F
情況(3)	F	T	F	F
情況(4)	F	F	F	F



圖(4)

如果確定該論證是無效論證，那麼就要告訴別人為什麼該論證是無效論證。用來說明無效論證的稱為反例(counterexample)。反例的意思是，將該論證的前提皆真而結論為假的可能情況顯示出來。從【練習一】的情況來看，情況 (2) 會使該論證的前提皆真而結論為假，換言之，這個論證容許前提為真而結論為假的情況，所以是無效論證。而在這個論證中，p 為真 q 為假的情況，是用來證明這個論證為無效論證的情況，所以 p 為真 q 為假的情況稱為反例。為了簡單呈現反例中命題的真假值情況，我們將反例寫成下列的形式：

反例 (counterexample)

p	q
T	F

【練習二】

$$(p\vee q)\rightarrow(p\wedge q)$$
$$(p\vee q)$$
$$\therefore(p\wedge q)$$

注意：(p∨q) 和 (p∧q) 兩個語句並不是前提，它們只是前提的一部分。色塊之處才是前提。

	p	q	(p∨q)	(p∧q)	前提		結論	
					(p∨q)→(p∧q)	(p∨q)	(p∧q)	
情況(1)	T	T	T	T	T	T	T	← 有效
情況(2)	T	F	T	F	F	T	F	
情況(3)	F	T	T	F	F	T	F	
情況(4)	F	F	F	F	T	F	F	

圖(5)

在【練習二】中，情況(1)～(4)顯示出沒有前提皆真而結論為假的情況，所以該論證是有效論證。而在真值表右方箭頭指情況(1)的意思是，當我們面對真值表時，可以先考慮前提皆真的情況，從情況(1)～(4)的觀察中發現，只有情況(1)是前提皆真的情況，也就是說，情況(2)(3)(4)不可能造成前提皆真而結論為假的狀況出現，因此可以先行剔除而不予考慮，只要看看情況(1)的狀況就可以決定該論證是否為有效論證。



【練習三】

$$(s\vee t)\rightarrow(s\wedge t)$$
$$\neg(s\vee t)$$
$$\therefore \neg(s\wedge t)$$

	s	t	(s∨t)	(s∧t)	前提		結論
					(s∨t)→(s∧t)	¬(s∨t)	¬(s∧t)
情況(1)	T	T	T	T	T	F	F
情況(2)	T	F	T	F	F	F	T
情況(3)	F	T	T	F	F	F	T
情況(4)	F	F	F	F	T	T	T

有效

圖(6)

【練習四】

$$(p\vee q)$$
$$p$$
$$\therefore q$$

	p	q	前提		結論
			(p∨q)	p	q
情況(1)	T	T	T	T	T
情況(2)	T	F	T	T	F
情況(3)	F	T	T	F	T
情況(4)	F	F	F	F	F

無效

圖(7)

【練習四】為無效論證，因此除了註明該論證為無效論證外，還必須寫出反例：

反例 (counterexample)

p	q
T	F

【練習五】

$$(s \to t)$$
$$(r \to t)$$
$$\therefore \neg(s \to r)$$

	r	s	t	(s→r)	前提		結論	
					(s→t)	(r→t)	¬(s→r)	
情況(1)	T	T	T	T	T	T	F	← 無效
情況(2)	T	T	F	T	F	F	F	
情況(3)	T	F	T	T	T	T	F	← 無效
情況(4)	T	F	F	T	T	F	F	
情況(5)	F	T	T	F	T	T	T	
情況(6)	F	T	F	F	F	T	T	
情況(7)	F	F	T	T	T	T	F	← 無效
情況(8)	F	F	F	T	T	T	F	← 無效

圖(8)



該論證為無效論證，反例：

r	s	t
T	T	T
T	F	T
F	F	T
F	F	F

在【練習五】的真值表中，可以發現有四種可能情況都是前提皆真而結論為假。因此，這種論證形式所呈現的論證，一定是無效論證。不過，當我們要告訴別人，利用這種論證形式是無效論證時，其實只要舉出其中一種前提皆真而結論為假的情況，就足以反駁了。

雖然在語句邏輯中，真值表法可以用來證明，某個論證是有效還是無效論證。但是，真值表法有個小小的麻煩，就是當命題符號數目一多，所要列出的可能情況就相當嚇人了。因為在 n 個不同的命題符號出現時，就會有 2^n 種可能情況。（例如 8 個不同的命題符號出現，就會有 $2^8=256$ 種情況。）如果真要完整地寫出來，可不是件容易事！

套套句與矛盾句

當我們利用真假值的概念看待語句時，有些特別的語句值得一提。有些語句的特徵是：(1)在任何可能情況下，語

句的真假值必然為真。有些則是：⑵在任何可能情況下，語句的真假值必然為假。符合特徵⑴的語句，稱為套套句 (tautology)。而符合特徵⑵的語句，則稱為矛盾句 (contradiction)。這兩種類型的語句都挺有趣的，因為這兩類語句聽起來就跟廢話沒什麼兩樣！

⑴套套句

舉個例子來說，假設你在路上遇到一個人，你向他問路，到西門町是不是應該向右轉？如果他的回答是：

向右轉會到西門町　或者　不要向右轉會到西門町！

你認為他說了一句什麼話呢？沒錯，就是廢話。再仔細想想看，他說的是真話還是假話呢？很顯然地，他不但沒有說假話，而且我們還可以肯定他百分之百說了句真話。因為「向右轉會到西門町或者不要向右轉會到西門町」這句話，不管何時、何地或者何人來說都是百分之百的真話。如果用 p 代表語句：「向右轉會到西門町」，那麼「向右轉會到西門町或者不要向右轉會到西門町」就可以轉譯成語句 $(p \vee \neg p)$。接下來，用真值表法考慮語句 $(p \vee \neg p)$ 的可能情況。



	p	(p∨¬p)
情況(1)	T	T
情況(2)	F	T

圖(9)

在圖(9)中所顯示的是，不管在情況(1)或情況(2)，語句 (p∨¬p) 的真假值均為真。這種百分之百肯定在任何情況下都為真的語句，就稱為套套句。例如 (p∨¬p), ¬(p∧¬p), (p→(q→p)), ¬(p∧q)↔(¬p∨¬q) 等等，都是套套句。

在論證結構中，套套句有著非常特殊的地位。從論證形式來說，如果論證的結論是套套句，那麼這種論證形式一定是有效論證。因為套套句的意思就是，不需要任何前提，也可以確定套套句一定成立。如果從真值表的觀點來看，套套句就是在任何可能情況下均為真的語句。也因此，當結論是套套句時，不管加了多少前提，都不影響結論為真的情況。而結論一定為真的重要意義，在於保證找不到前提皆真而結論為假的情況，所以可以肯定以套套句作為結論的論證，一定是有效論證。

	p	q	(q→p)	前提	結論 (p→(q→p))
情況(1)	T	T	T		T
情況(2)	T	F	T		T
情況(3)	F	T	F		T
情況(4)	F	F	T		T

圖(10)

在圖(10)中，從情況(1)到情況(4)，結論的真假值均為真。因此不可能出現前提皆真而結論為假的情況。

各位也許會覺得這名詞真怪，套套句是什麼意思呢？其實只不過是將英文 tautology 直接音譯的語詞。而有許多人會將 tautology 這個詞，利用意譯的方式將它翻譯為恆真句，意思是在任何可能情況下，語句的真假值都為真。由於對如何適當翻譯這個詞，還牽涉到一些哲學上的爭論，為了避免不必要的困擾，我的建議是直接用音譯的方式將這個詞翻譯成套套句。

(2)矛盾句

矛盾句的情況和套套句恰恰相反。矛盾句就是任何情況下，語句都確定為假。如：¬ (p∨¬p), (p∧¬p), ¬(p→(q→p)), ¬(¬(p∧q)↔(¬p∨¬q)) 等等。假設你今天要出門時，考慮要不要帶雨傘，然後你問了媽媽，外面現在是否正在下雨？如果媽媽的回答是：

外面正在下雨 而且 現在沒有下雨!

我想任何人都會愣住，這句話到底在說什麼啊? 什麼「既下雨又不下雨」的。由於媽媽所說的話是矛盾句，你並不需要走到戶外去看看天氣，才回過頭來決定媽媽說的是真話還是假話。因為你知道，「外面正在下雨而且現在沒有下雨」這句話，不管在任何情況下都是假的。同樣地，我們也可以用真值表法顯示任何情況均為假是什麼意思。用 p 代表語句:「現在正在下雨」，而語句 (p∧¬p) 代表「外面正在下雨而且現在沒有下雨」。

	p	(p∧¬p)
情況(1)	T	F
情況(2)	F	F

圖(11)

同樣的，在論證結構裡，矛盾句也有著特殊的地位。如果在前提中有某個語句是矛盾句的話，那麼不管結論是什麼，都一定是有效論證。因為當矛盾句在前提中出現，就表示不可能有前提皆真的情況出現。想當然爾，也找不到前提皆真而結論為假的情況，所以前提中出現矛盾句的論證，一定是有效論證。

	p	q	(q→p)	(p→(q→p))	前提	結論
					¬(p→(q→p))	
情況(1)	T	T	T	T	F	
情況(2)	T	F	T	T	F	
情況(3)	F	T	F	T	F	
情況(4)	F	F	T	T	F	

圖(12)

圖(12)明顯地顯示出，不管結論中出現的語句是什麼，都不能找到前提皆真而結論為假的情況出現。因此凡是在某個論證中，前提有矛盾句出現時，其論證一定是有效論證。換言之，對前提中有矛盾句的論證而言，是可以導出任何結論的。

從上述的說明可以知道，有兩類論證形式是非常特殊的：(1)結論為套套句的論證；(2)前提中有矛盾句的論證。在古典邏輯中，只要出現這兩種情況中的一種，該論證便為有效論證。

然而，並不是所有人都承認此類論證為有效論證。有些人甚至會覺得，宣稱這類論證是有效論證，根本就違反思考規則。例如：下列這個以矛盾句為前提的有效論證：

(A11) 現在下雨 而且 現在不下雨 （矛盾句）

所以，消防車是紅色的

有些人會認為，論證 (A11) 中的前提和結論之間沒有蘊



涵關係，因此應該是無效論證。但是以古典邏輯的觀點來看，它卻是有效論證。這兩種看法哪一種比較有道理呢？目前這仍然是一個需要深入研究的問題。

矛盾句在日常生活中是非常重要的，讓我們想想說謊的例子。如果你看到你的朋友在宿舍中睡覺而沒有去上課。事後，他跟老師說：「我生病了，去看醫生，所以沒有上課。」你會告訴別人這位同學說謊，想想看，你是根據什麼理由指出他說謊呢？正是因為他不可能同時出現在宿舍和診所。換言之，甲在宿舍和甲在診所是矛盾的。如果寫得清楚些，就是「甲在宿舍而且甲不在宿舍」是矛盾句。所以當我們知道某人說謊時，就是用來說明他的情況的某些語句出現矛盾的情況。可是，有些時候某些人說謊，你卻不知道。原因在哪呢？其實原因就是你不知道某些情況，因此你會認為用來描述他的情況的語句，沒有矛盾的情形。精確地說，就是你認為用來描述的語句，彼此之間可以保持一致性 (consistency)，所以你找不到漏洞。所謂一致性的意思就是，當你認為用來描述他的情況的話都是真的，也不會導出任何矛盾。沒有矛盾，當然就沒有漏洞可循。

一致性 (consistency)

在傳統邏輯中，一致性的語意概念為：當某個集合中的所有語句，在某種解釋下可以同時為真，這些語句就被稱為一致的。

但是，在現代邏輯中，「一致性」有語法上的定義：當某個集合的語句，不能同時推導出 φ 和 ¬φ 的結論，則該集合的語句是一致的。

而在古典邏輯系統中，當某個集合的語句為不一致 (inconsistent) 時，那麼此一集合的語句可以推導出任何結論。

弗雷格 (Gottlob Frege, 1848-1925)



德國數學家及哲學家，當代數理邏輯的創始者。1879 年出版首部在邏輯方面極富原創性的著作《概念記法》，在這本著作中，弗雷格設計了一種形式語言，最引人注目的是用以表達普遍性的量詞——變元 (quantifier-variable) 的記法，以及量化邏輯的發展。其影響十分深遠，20 世紀初許多著名的邏輯學家，如羅素、維根斯坦及卡納普都深受影響。

維根斯坦 (Ludwig Wittgenstein, 1889-1951)



出生於奧地利的英國哲學家，其作品極富原創性與挑戰性。早期的《邏輯哲學論》，該書是維根斯坦在第一次世界大戰的戰壕中撰寫的。晚期的《哲學探究》，該書是維根斯坦在 1936 年到 1948 年中所寫的，但是直到維根斯坦死後才出版問世。這兩本著作都產生非常深遠的影響。



本章小結

本章主要用意是讓讀者了解符號和意義的關係。人們用符號來傳達意義，可是符號本身並不具任何意義，那麼符號的意義到底是什麼呢？研究這兩者之間的關係的學問便稱為語意學。同樣地，讓我們以表列的方式快速複習一下本章所提到的概念。

- 邏輯語言：用來表達論證形式的語言，包含符號和形構規則兩部分。
- 真值原則：命題非真即假，且不可能既真又假。
- 外延原則：語句真假值可由其組成部分決定之。
- 真值函項原則：在古典邏輯中出現的語句連接詞均為真假函項。
- 語意學：研究符號與意義關係的學科。
- 真值表法：用賦予語句真假值的方式決定論證有效與否的方法。
- 套套句：在任何可能情況下皆真的語句。
- 矛盾句：在任何可能情況下皆假的語句。
- 一致性：某些語句是一致的意謂這些語句可同時為真。
- 有效論證：不可能出現前提皆真而結論為假的情況的論證。



語句邏輯的演算系統

「天哪！這世界的真理到底是什麼?」士中站在教室前面，對著操場大喊著。同班的友麟和鵬宇也在一旁皺著眉頭，「真是太難理解了，怎麼會有這種事呢?」友麟首先應和著士中。「就是說啊！這到底怎麼一回事？難道長大的過程就是不斷地否定自己原來相信的真理，又接受一些看起來怪怪的真理嗎?如果是這樣，那原來相信的真理就不是真理了啊，那現在相信的真理難道就是真的嗎?真是煩死人了。」鵬宇也是滿臉愁苦地說道。



士中、友麟和鵬宇是高雄首屈一指的高中的同班同學，在考上高中後漸漸成為好朋友。在高二的時候，他們立下一個共同的心願，要發現世界的真理到底是什麼。這個願望催促著他們努力研究物理和數學，因為他們深信世界的真理就在這些理論中。直到升高三的暑假，鵬宇偶然間發現坊間有本書，他隨手翻了翻，發現了自己從未懷疑過的問題。這個問題是關於歐幾里得的幾何學的第五公設，「通過某一直線外一點，有且僅有一條與之平行的直線。」這個設準看起來毫無問題，早在國中的時候他就學過用這個設準去證明許多定理，從來不覺得這個設準有什麼問題。可是翻閱著書一路看下去，越看越驚，他二話不說買了書，希望趁著暑期輔導課時準備和士中、友麟分享他的新發現。



「士中、友麟，快！你們一起來看看這檔子怪事。以前數學老師教我們平行的問題的時候，不是說『通過直線外一點會有而且只有一條直線嗎?』可是你們看看這裡面寫的：『讓擁有智慧的我們先想想歐幾里得幾何學中的第五公設。首先，直線的定義是可以無限延長，既然平行的兩條直線都可以無限延長，而我們不可能畫出一條無限長的直線，如何確定平行的兩條直線沒有交點呢？再者，第五公設是不是可以由其他的公設推導出來呢？想想看，如果在歐幾里得的幾何學中假設第五公設為假，是不是應該導出矛盾呢?』」一連串的問題把三個人弄得暈頭轉向，顯然他們從未想過平行的兩條直線沒有交點這個想法有什麼錯。

接下來，三個人看到非歐幾何的章節，更是震驚得不知所以。原來早在十九世紀時，數學家就已建立一套和歐幾里得的幾何學完全不同的幾何系統。而且在不同的幾何系統中，會有不同於第五公設的其他公設出現，更令人驚訝的是，數學家居然無法證明在歐幾里得幾何系統中，加入替代第五公設的其他公設會導出矛盾。士中在和好友的相對苦笑中發出了天旋地轉的聲音：「天哪！這世界的真理到底是什麼?」

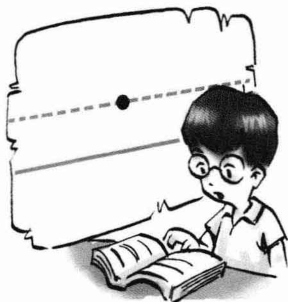
「其實認真想想也挺有道理的。」友麟在眾家兄弟的困惑中首先開了一條路。「咦！你說什麼，什麼挺有道理？你倒是說說看。」士中把目光轉到了友麟的身上。鵬宇也在一旁湊和著。友麟若有所思地說道：「你們兩個想想看，如果



我們要搭飛機到紐約的話，最短的距離是什麼?」鵬宇搶先說道:「那還不簡單，不就是把高雄和紐約這兩個城市當作兩個端點，畫條直線不就得了?」士中突然間好像明白了友麟的問題，針對鵬宇的說法提出自己的見解:「鵬宇，你的說法好像有點兒問題。如果按照你的做法，那麼飛機所飛的並不是最短的距離，而是應該挖一條地道從高雄這端通到紐約去。」鵬宇兀自不服氣地說著:「挖地道就挖地道，有什麼不行的?友麟問的明明就是最短的距離，那最短的距離不是直線那是什麼? 所以這兩個端點間的最短距離是畫條連接兩個端點的直線就是了啊!」友麟聽了鵬宇的說法，輕聲地說道:「鵬宇，你說的好像沒錯。可是，就是怪怪的，我也說不上來怪在哪裡?總之，我們當然知道航空公司不會把航線畫在地面下，可是，他們需要一些方法來計算在地球表面飛行的問題吧。哎呀!真是一團亂。」

士中聽著友麟和鵬宇之間的對話，好像可以抓住什麼卻又抓不住一般。「鵬宇，我想友麟的意思是說，如果在地







球表面上求最短距離的話，就不是用挖地道的方式畫出那條我們想要畫的直線。而是應該在球面上作出最短距離的『直線』，雖然這條直線並不是歐幾里得幾何系統中的直線。」士中模模糊糊地說道。友麟聽著聽著，似乎也有點兒東西在腦袋中飄來飄去。「士中，如果按照你的說法，意思就是說在不同的幾何系統中，『直線』的定義會不一樣囉！」友麟接著士中的話說著。鵬宇搔著頭說：「你們兩個到底在說什麼呀！直線就是直線，還會有什麼不同的直線，如果直線的定義可以改來改去，那我也可以把曲線稱為直線啊。這麼一來，我們怎麼會知道什麼是『直線』呢？」

士中聽了鵬宇所說的話，剛剛出現的一些靈光好像陷入一片黑暗。友麟也接著說道：「說得對，鵬宇！我贊成直線的定義不能改來改去的，可見在幾何學中一定有一些更基本的概念是我們不知道的，可是，那是什麼呢？」友麟把鵬宇帶來的書又翻了翻，突然間看到一個令他震驚的字眼——空間。他趕緊把他的發現拿給士中和鵬宇看，士中突然有所頓悟地說：「對，沒錯。就是空間，我們是以不同的空間概念相互交錯，才會出問題的。」聽完士中的話，鵬宇還是丈二金剛摸不著頭腦：「士中，你說的是什麼意思？為什麼我聽不懂呢？」



友麟和士中相視而笑。「鵬宇，我想士中的意思是說，地球表面明明是個球形表面，我們想要在球面上求出最短距離就必須在球面上畫出來，而這條線就是球面上的『直線』。因為在球面上的空間並不包括地面下的空間。因此，如果我們把這兩個空間概念交錯在一起，那我們就不知道我們所說的『直線』是指哪一個系統中的直線。或者更明白地說，在談論『直線』之前，我們必須先確定我們是在談哪一個幾何系統中的直線，不然的話，就會搞得亂七八糟了。」友麟說完這一番話，士中點著頭說道：「友麟說得一點兒都沒錯，我正是這個意思。」

鵬宇卻還是有點兒混亂。「好吧！如果你們說的是對的，雖然我不太了解你們說的是什麼。可是你們可以告訴我嗎？為什麼要有不同的幾何系統呢？難道是人們喜歡自找麻煩所弄出來的嗎？還有，既然會有不同系統中所謂的『直線』，但是直線的定義是不是都一樣呢？」士中和友麟聽著鵬宇的問題，士中收起了微笑的嘴角，而友麟彷彿也意識到問題的嚴重性地說道：「嗯！鵬宇。你所說的這個問題的確很有趣，我想我們繼續努力去解開你所說的問題好了。對了，學校隔壁那家『小茶館』還不錯，我們不妨去喝個茶，清醒清醒頭腦吧。」「真是個好主意，我贊成。」鵬宇舉著雙手，手舞足蹈地繼續說著。「士中，一起來吧！反正你不是想要搞清楚世界的真理是什麼嗎？我想我們三個臭皮匠可以喝茶喝出一個諸葛亮來。」士中心想，反正現在也還搞不太清楚到底



是怎麼一回事，就唯唯諾諾地應著：「好吧！也許喝個茶可以緩緩神經，到時候想出點兒玩意兒出來。」於是三個人就前腳後腳地向著茶館出發了。

每個人在生活上都會有溝通不良的經驗。有些情況是源自對概念的歧義所導致。例如故事中直線的概念，在不同的幾何系統中，會有不同的意義。可是，在日常生活中，大多數的人都假設在溝通過程中，自己和對方使用相同的詞，就會有相同的意義。因此，在不自覺中，許多溝通不良的情況就會出現。

而邏輯既然是研究思考規則的學科，那麼設計邏輯系統時，是否也應該關心人們實際上是怎麼思考的呢？可是，由於現代邏輯的蓬勃發展，也發展出許多系統。我們很難決定，哪一個邏輯系統才是人類真正的思考規則？這個問題的困難程度，就像故事中的幾何系統一樣。一般人總以為自己了解，兩條平行線無限延長仍不會有交點的意義，可是認真反省一下，就會發現其實自己對無限的意義一點兒也無法掌握。同樣地，故事中的主角原以為自己了解直線的意義，豈知這個想法，一點兒也禁不起挑戰。

從這個小故事中，可以得到一個重要的啟示。設計一個好的系統，來決定哪些定理是成立的，或者哪些說

法是不成立的，是相當重要的工作。一如在邏輯學中，我們希望設計出一個好的系統，將論證分成有效和無效兩大類。換言之，此系統的功能在於，幫助我們決定哪些論證是有效論證，而哪些論證又是無效論證。雖然先前我們可以用真值表方法來決定論證有效與否，但是真值表方法顯然十分耗費心力。因此，如何簡化決定論證有效與否的程序，自然就成了邏輯學家們積極努力的目標。

公理系統的基本想法

愛因斯坦曾說:「當今西方文明的兩大基石，就是邏輯和歐幾里得的幾何學」。在現今的教育體制下，知道幾何學的人，遠比知道邏輯的人多得多。因為在每個人的學習生涯中，都必須學習數學，因此無可避免會接觸到幾何學。幾何學研究的對象，就是由點、線、面所構成的圖形和性質。在學習幾何學的過程中，通常老師會清楚地告訴學生，如何運用這些對象描述位置，說明軌跡，或者描述分布情形等等。可是由於邏輯並未成為教育過程中的必修學科，因此相對地被忽略了。然而，與其他學科相較，邏輯真的比較不重要嗎? 想想看，我們不但在日常生活中，藉由語言表達我們的

想法，甚至當我們接觸數學和科學理論時，不也都是需要藉由語言表達其內容嗎？根據我們對邏輯的了解，這些內容之間的關係，不就是邏輯學所要研究的對象嗎？20 世紀的巨人——愛因斯坦，看出這個關鍵所在。因此，他對於在文明的發展過程中，居功厥偉的邏輯學表示相當的肯定。不過，相較於邏輯學直到 19 世紀晚期及 20 世紀才有長足的進步而言，幾何學卻早在西元前數個世紀之前，歐幾里得就已經利用公理系統 (Axiom System) 的概念，寫出《幾何原本》(*Elements*) 一書。因此長久以來，幾何學都被視為真理的代表。

可是好景不常，在 19 世紀中葉時，非歐幾何 (non-Euclidian Geometry) 的出現，大大震驚了所有的學界，天呀！真理的避風港不見了！原來數學中的歐氏幾何系統一直被視為真理，不可能有任何虛假的成分在內，但是現在的情況完全改觀！

數學家們倒不是認定歐氏幾何有什麼錯，而是對於原來幾何系統中的設準 (postulates) 產生疑問。而產生問題的就是第五設準（或稱為平行設準），也就是故事中所提到的第五公設。當人們開始對無限、直線等概念有所懷疑時，應該如何解決這個問題呢？

經過真值表法的洗禮之後，相信大家不難發現，如果在套套句前面加上否定號，就會變成矛盾句。原因很簡單，套套句是指所有情況都為真的語句，加上否定號之後，所有原

本為真的情況都變成假，而描述所有情況均為假的語句，正是矛盾句！基於這樣的想法，如果歐氏幾何中所描述的都是真理，那麼將其中有疑慮的設準加上否定號，應該會導出矛盾的結果。因此數學家們相信如果把第五設準加上否定號，然後跟系統內的其他設準放在一起，應會導出矛盾。可是，這個努力卻導致出人意表的結果，數學家們發現，不但沒有導致矛盾，反而衍生了其他的非歐幾何系統。

這個結果當真把大家都嚇傻了！原來歐氏幾何被認為是千古不移的真理，所以幾何系統的設準也都是不證自明(self-evident)的真理。然而，經過這番嘗試之後，真理的避風港可以說被破壞殆盡。此後，數學家們紛紛另起爐灶，重新思考數學的基礎是什麼。在這樣的情況下，數學家們找到了邏輯，他們發現其實數學的基礎應該還原到邏輯系統，這個發現重新振奮了所有的數學家和邏輯學家，所有的人幾乎都努力地解決這些問題。所以囉，我們今天可以看到邏輯學的蓬勃發展，這些人可說是功不可沒呢！邏輯的發展也果真促成了整個文明的發展，各位看到的電腦、自動化機械設備等等，無一不是通過邏輯的演算系統完成的！

在思考如何將數學還原到邏輯系統的問題上，歐幾里得用來構思幾何學的方法提供了相當好的方向。數學家和邏輯學家都覺得公理系統這樣一個簡潔、而解決問題能力強大的系統，是相當值得學習的典範。於是，這些絕頂聰明的人開始努力，如何利用公理系統處理邏輯語句。



那麼，什麼是公理系統呢? 所謂的公理系統簡單來說，就是由公理 (axioms)，加上推論規則構成的系統。所謂公理就是不證自明的真理，用簡單的話說，就是每個人一眼就可以看出該語句為真。例如：「兩點間最短距離為直線」。而推論規則就是符合正確的思考規則，這類的規則可視為正確的推論規則，也就是可以在公理系統中運用的規則。例如由 $(p \wedge q)$ 成立推論 p 成立是正確的推論規則。反之，由 p 成立推論 $(p \wedge q)$ 成立則是不正確的推論規則。這樣的一個系統有什麼用呢? 這個用處可大了。因為人類的腦容量實在有限，也沒有一個人敢宣稱他知道所有真理，所以如果可以掌握公理和推論規則，就好像握有通往真理的鑰匙，可以一步步開啟通往真理的大門。在數學的幾何系統中不是常常在證明許多定理 (theorem) 嗎? 請各位回想一下，通常是怎麼證明定理的呢?

公理（或其他定理） —推論規則→ 定理

其實整個證明過程就是推論過程，利用公理或者其他定理，經由推論規則，得到意圖證明的結論。在邏輯中，公理系統的功能就是這樣。凡是可以僅由公理加上推論規則所得到的結論，就稱為定理。從另一方面來看，由於推論過程完全遵照推論規則，所以當公理為真的時候，就可以保證定理也為真。所以，歐幾里得在構思幾何學時，他的想法就

是從最沒有爭議的真理做為公理，然後利用大家認可的正確的推論規則，所得到的結論也一定都是真理。因為這個道理，歐氏幾何才會一直被視為真理的代表。

可是，在邏輯系統中，哪些邏輯語句可以作為公理呢？其實這是個相當有趣的問題，也引發過很多的討論。最後，邏輯學家們發現，要選擇哪些作為公理系統的公理，其實是任意的，如果把所有可以推出來的定理都當作公理看待，也沒什麼不可以。只是這麼一來，就失去公理系統引以為傲的簡潔形式了。為什麼呢？只要各位繼續讀下去就會豁然開朗了！

公理系統的演算及問題

公理系統是由公理和推論規則所構成，所以讓我們來看看，古典語句邏輯的公理系統，包含哪些公理和推論規則：

1.公理

(A1) $(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi))$

(A2) $((\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\theta))\rightarrow((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\theta)))$

(A3) $((\neg\varphi\rightarrow\neg\psi)\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi))$



2.推論規則

(MP) 從 φ 和 (φ→ψ) 成立，可以推論出 ψ 成立。

公理系統最引以為傲的就是，整個系統非常簡潔。只有三個公理，再加上一條推論規則，就可以處理古典語句邏輯的所有論證。是不是很厲害呢？其實厲害的不僅於此，各位想想看，邏輯學家怎麼知道要用這三個語句當作公理呢？憑直覺嗎？當然不是。邏輯學家必須不停的嘗試，以確定某個語句可以從其他語句推導出來，如此一來，這個語句就可以被視為定理，而不需要放在公理的位置。邏輯學家剛開始的時候，就是把不能從其他語句導出的當作公理，可想而知，原來的公理可是很多很多的喔！今天能夠見到這麼簡潔的系統，實在不能不佩服邏輯學家的辛勤付出！

接下來，就是演算的問題了。在進行演算之前，值得再次提醒的是，系統中出現的希臘符號 φ、ψ、θ，用法其實跟前面一樣，就是用來表示某個邏輯語句。在演算的問題上，剛剛已經強調過，可以由公理加上推論規則推導出來的結論，就稱為定理。所以定理的狀況跟公理一樣，在任何可能情況下均為真。例如，在這個只有三個公理的公理系統中，並沒有把 (p→p) 當作公理看待，然而我們可以藉由證明的方式，推導出 (p→p) 是公理系統中的定理。推導過程為何，

我們一起來看看。

證明：

1.	$((p\to((p\to p)\to p))\to((p\to(p\to p))\to(p\to p)))$	(A2)
2.	$(p\to((p\to p)\to p))$	(A1)
3.	$((p\to(p\to p))\to(p\to p))$	1, 2 (MP)
4.	$(p\to(p\to p))$	(A1)
5.	$(p\to p)$	3, 4 (MP)

【步驟一】

在這個演算中的式子 1 和公理 (A2) 有什麼關係呢？當然有，剛剛說過希臘字母 φ、ψ、θ 的意思是可以代入任何語句，所以用 p 代入 φ 的位置、用 (p→p) 代入 ψ 的位置、用 p 帶入 θ 的位置。代入之後便形成式子 1。

(A2)	$((\varphi\to(\psi\to\theta))\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\theta)))$
式子 1	$((p\to((p\to p)\to p))\to((p\to(p\to p))\to(p\to p)))$

【步驟二】

將式子 2 和 (A1) 比較，用 p 代入 φ 的位置、用 (p→p) 代入 ψ 的位置。

(A1)	$(\varphi\to(\psi\to\varphi))$
式子 2	$(p\to((p\to p)\to p))$

【步驟三】

式子 3 的 MP 規則的應用又是什麼呢？把 MP 規則中



的 φ 的位置用 (p→((p→p)→p)) 代入，而 ψ 的位置用 ((p→(p→p))→(p→p)) 代入。φ 和 (φ→ψ) 成立。

φ
(p→((p→p)→p))

和

(　φ　→　ψ　)
((p→((p→p)→p))→((p→(p→p))→(p→p)))

所以我們可以推論出式子 3 成立。

ψ
((p→(p→p))→(p→p))

【步驟四】

而式子 4 就是再利用一次 (A1)，而用 p 代入 φ 的位置、用 p 代入 ψ 的位置。接下來利用式子 3 和式子 4 就可以經由 MP 規則推論出 (p→p)。在這個推論中，不需要任何的前提，只需要公理和推論規則就可以得到結論 (p→p)。這類的結論便稱為定理。

僅由公理加上推論規則得到的結論稱為定理，但是需要藉由某些前提才能推論出來的結論，就不能稱為定理。只能說在某些前提的條件下可以推論出來的結論。例如：

p, (q→(p→r))/∴(q→r)

上述的符號序列代表一個論證，在 / 左方的 p 和 (q→(p→r)) 表示該論證的前提，右方的 (q→r) 則為該論證的結論。

如果以直排的方式表示，則是：

$$\begin{array}{c} p \\ (q\rightarrow(p\rightarrow r)) \\ \hline \therefore(q\rightarrow r) \end{array}$$

證明：

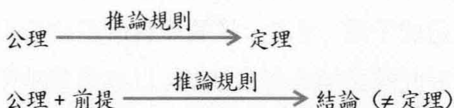
1. p	前提
2. $(q\rightarrow(p\rightarrow r))$	前提
3. $(p\rightarrow(q\rightarrow p))$	(A1)
4. $(q\rightarrow p)$	1, 3 (MP)
5. $((q\rightarrow(p\rightarrow r))\rightarrow((q\rightarrow p)\rightarrow(q\rightarrow r)))$	(A2)
6. $((q\rightarrow p)\rightarrow(q\rightarrow r))$	2, 5 (MP)
7. $(q\rightarrow r)$	4, 6 (MP)

上述的證明過程，就是顯示在公理系統中，經由 p 和 $(q\rightarrow(p\rightarrow r))$ 為前提，可以推導出 $(q\rightarrow r)$ 的結論。可是，公理系統卻隱藏著莫大的困難，當我們想要應用公理系統來證明某個論證是否為有效論證時，會遭遇到的兩個困難：⑴很少有人一眼可以看出，應該引進那一個公理，或者在公理中的希臘字母符號應該代入什麼語句，會對證明有幫助。⑵即使你很努力嘗試，但是就是無法從前提證明出結論，也不能說這個論證一定是無效論證。換言之，公理系統並未提供一個有效程序決定某個論證有效與否。

所以相較於公理系統的演算方式，真值表法是否又讓你懷念些？是的。正如我所說，雖然真值表法有時候繁瑣了



點兒，可是卻可以提供一個有效程序，讓我們得以決定哪些論證是有效論證，而哪些又是無效論證。而採用公理系統進行證明，有時候可能只是白忙一場而已。說到這裡就不得不佩服這些邏輯學家們，在真值表法出現之前，他們可只有公理系統，各位想想看，他們每個人都必須花費偌大力氣去證明每一個推論。這種精神非常值得我們學習！



可決定性 (decidability)

集合的某一項性質。所謂的「可決定性」是指，存在著某個有效的程序，通過此一程序，可以決定任何事物是否為該集合的一份子。以命題（語句）邏輯而言，將所有的定理視為一個集合。存在著某個有效的程序（例如，真值表方法），可以決定某個語句是否屬於定理，因此，命題（語句）邏輯是「可決定的」。

真值樹系統的基本想法

經過了公理系統的洗禮之後，就算進入邏輯的門檻。根據對公理系統演算法的分析顯示，利用公理系統處理邏輯中的推論問題，並不是相當容易的。除非是天縱英明的人，否則試圖利用公理系統演算法，證明有效論證或無效論證，可不是件容易的事啊！那麼，有沒有其他系統的演算法，可以用來確定某個論證是有效論證或者是無效論證，而又不

至於太麻煩呢?

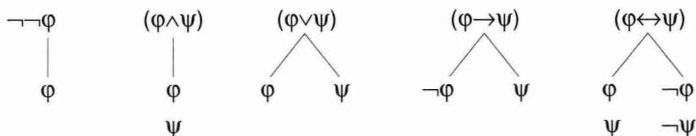
於是，邏輯學家利用「有效論證：前提皆真，結論不可能為假」的想法，設計了一個新的演算法。各位都知道，在有效論證中，前提皆真的話，結論一定也是真的，所以，如果我們將結論加上一個否定號（亦即設前提皆真，而結論為假），那麼在該論證是有效論證的情況下，這個假設必定造成矛盾。反過來說，如果結論加上否定號之後，卻還可以和前提一起存在，沒有造成矛盾，就表示該論證容許前提皆真而結論為假的情況，因此該論證為無效論證。以這個想法所設計的演算系統就稱為真值樹系統 (tableaux system)。

真值樹系統是截至目前為止，最容易上手的演算法。因為真值樹系統的演算不但可以避免真值表法的繁瑣，也解決了公理系統不知從何著手的困難。不過，讀者必然會發出疑問，既然如此，為什麼不乾脆一點直接介紹真值樹系統就好了，還要找麻煩去學真值表方法和公理系統呢? 其實，理由很簡單，如果不經過其他方法的洗禮，很難理解此一系統的優點在哪裡。另外，根據作者的經驗，許多一開始就接觸真值樹系統的人，反而不知道許多邏輯推論上的有趣之處在哪裡。所以，提供讀者欣賞與享受邏輯的趣味之處，當然就是作者的功課囉!



真值樹系統演算及反例

在了解真值樹系統的基本想法之後，接下來要設計真值樹的演算系統。在設計此一系統時，最簡單的想法就是根據先前所提到的五個連接詞作為基本架構。當然各位會在許多書籍上看到許許多多的規則，不過，萬變不離其宗，其他的規則只不過是在演算時，能使過程更為簡化而已。因此，熟悉基本規則其實是最重要的。讓我將基本規則明列如下：



在上述的基本規則中，第一個規則非常容易，如果在真值樹中某個語句前有兩個否定號，那麼加了兩個否定號的語句和語句本身是一樣的，所以這個推論規則是成立的。舉個例子來說，如果某個人說：「我不是不愛你！」意思不就是「我愛你」嗎？所以從加了兩個否定號的語句可以推論出語句本身。

第二個規則則是用 $\wedge$ 連接的語句，在語意學中對 $\wedge$ 的解釋是 φ 和 ψ 皆真的情況下，語句為真，因此在分解時，

φ 和 ψ 必須在同一分枝上，意即 φ 和 ψ 必須同時為真。至於第三個規則中，φ 和 ψ 是用 $\vee$ 連接，在語意學中將 $\vee$ 解釋為 φ 或 ψ 為真，則 $(\varphi\vee\psi)$ 為真。所以分成二個分枝的意思就是只要 φ 和 ψ 有一個為真就可以了，因此分成兩邊各自發展。

第四和第五個規則，就稍微需要動點腦筋。將第四個規則和第三個規則稍作比較，可以發現第四個規則的意思是 $\neg\varphi$ 或 ψ 為真，則 $(\varphi\rightarrow\psi)$ 為真，而 $\neg\varphi$ 或 ψ 為真可以寫成 $(\neg\varphi\vee\psi)$，所以意思就是 $(\neg\varphi\vee\psi)$ 和 $(\varphi\rightarrow\psi)$ 是一樣的。在邏輯系統中，像 $(\neg\varphi\vee\psi)$ 和 $(\varphi\rightarrow\psi)$ 表達相同意思的語句稱之為等值 (equivalent) 的語句，等值的意思就是這兩個語句在真值表中所有可能情況的真假值都相等。

p	q	$\neg p\vee q$	$p\rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

仔細觀察上述的真值表，可以發現在每一種可能情況下，$(p\rightarrow q)$ 和 $(\neg p\vee q)$ 的真假值均相同，所以 $(p\rightarrow q)$ 和 $(\neg p\vee q)$ 是等值的。所以第四個規則可以看成把 $(\varphi\rightarrow\psi)$ 改寫為 $(\neg\varphi\vee\psi)$，再分成二個分枝的規則。

至於第五個規則，也是先理解 $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ 和 $((\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\vee\neg\psi))$



是等值的語句，讀者不妨自己用真值表做做看。所以實際步驟是先分成 $(\varphi\wedge\psi)$ 和 $(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ 兩個分枝，然後利用第二個規則分解成 φ 和 ψ 在同一個分枝上，而 $\neg\varphi$ 和 $\neg\psi$ 在同一個分枝上。

正如此一演算法的基本精神所說，我們的方式是將所有的複雜語句進行拆解，原則上是將所有的複雜語句拆解到最簡單的成分，然後在每一個分枝仔細檢查是否有矛盾的情形出現。所謂的矛盾就是在同一條延續的分枝線中發現 φ 和 $\neg\varphi$ 都出現，那麼我們就可以宣稱此一分枝已然產生矛盾(在分枝末端畫上 x 記號表示)。可表示成下列形式：

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi \\ \neg\varphi \\ \times \end{array}$$

經由基本規則的介紹，我們可以把真值樹系統處理論證的步驟整理如下。

(1)一開始將論證中的「結論加上否定號」；
(2)利用基本規則，徹底分解語句；
(3)檢查所有分枝的狀況是否產生矛盾。

其實，真值樹的每一個分枝，就代表了該論證的每個可能情

況。眼尖的讀者不難發現，如果所有的分枝全部都產生矛盾的話，這個結果告訴我們什麼呢？沒錯，就是「前提皆真而結論為假」的情況不可能會出現。既然，不可能出現前提皆真而結論為假的情況，根據有效論證的定義，該論證當然是一個有效論證。然而，如果某一分枝沒有矛盾的情況，就表示有某種情況，使得該論證前提皆真而結論為假，那麼該論證當然就是無效論證，因為該論證容許前提皆真而結論為假的情況出現。

⑴真值樹系統的演算

有了上述的基本認識後，馬上就遭遇到一個相當棘手的難題。那就是要怎麼分解「加上否定號的語句」呢？例如，$\neg(\varphi \wedge \psi)$、$\neg(\varphi \vee \psi)$ 等。別擔心，有個非常重要的規則，可以幫助我們解決這個難題：狄摩根律 (De Morgan Law)。狄摩根律就是設法將加上否定號的語句，轉換成可以利用上述規則分解的語句。亦即將 $\neg(\varphi \wedge \psi)$ 替換成 $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ 處理，而將 $\neg(\varphi \vee \psi)$ 替換成 $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ 處理。根據先前說明的等值概念，我們可以利用真值表來說明⑴ $\neg(\varphi \wedge \psi)$ 和 $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$；以及⑵ $\neg(\varphi \vee \psi)$ 和 $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ 是等值的。在此僅列出真值表最後的結果，逐步的運算就留待讀者自行揣摩。



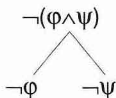
(1)

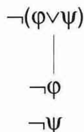
p	q	¬(p∧q)	(¬p∨¬q)
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

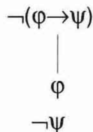
(2)

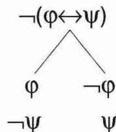
p	q	¬(p∨q)	(¬p∧¬q)
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

藉由狄摩根律的結果，使得我們可以將語句前面出現否定號的規則，寫成下列的形式：









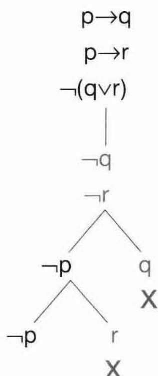
對於上述的第一和第二個規則，在經過狄摩根律的說明之後，相信不難掌握。不過第三和第四個規則，則需要略作說明。根據先前的規則顯示，我們可以把 (φ→ψ) 轉換成 (¬φ∨ψ)。因此兩個語句都加上否定號仍是等值的，也就是 ¬(φ→ψ) 可以寫成 ¬(¬φ∨ψ)。根據狄摩根律，¬(¬φ∨ψ) 可

以轉換成 $(\neg\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ 的等值語句，再根據 $\neg\neg\varphi$ 和 φ 是等值的，就可以得到 $(\neg\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ 轉換成 $(\varphi\wedge\neg\psi)$ 的結果。換言之，$\neg(\varphi\rightarrow\psi)$ 和 $(\varphi\wedge\neg\psi)$ 是等值的，因此第三個規則成立。利用同樣的方法，我們可以把 $\neg(\varphi\leftrightarrow\psi)$ 轉換成 $(\varphi\wedge\neg\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\psi)$ 的等值語句，讀者不妨試試看是否可以自行解答。為了讓讀者們可以快速掌握轉換等值語句的過程，以下是 $\neg(\varphi\leftrightarrow\psi)$ 和 $(\varphi\wedge\neg\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\psi)$ 的轉換過程：

	$\neg(\varphi\leftrightarrow\psi)$
轉換為	$\neg((\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi))$
轉換為	$\neg((\neg\varphi\vee\psi)\wedge(\neg\psi\vee\varphi))$
轉換為	$(\neg(\neg\varphi\vee\psi)\vee\neg(\neg\psi\vee\varphi))$
轉換為	$((\neg\neg\varphi\wedge\neg\psi)\vee(\neg\neg\psi\wedge\neg\varphi))$
轉換為	$(\varphi\wedge\neg\psi)\vee(\psi\wedge\neg\varphi)$

對於真值樹系統的規則有了全盤的認識之後，接下來要說明的是如何利用真值樹系統，進行語句邏輯的演算：

【例一】$p\rightarrow q,\ p\rightarrow r\ /\ \therefore q\vee r$





按照演算的步驟，一開始將前提 $(p \to q)$ 和 $(p \to r)$ 以及加上否定號的結論 $\neg(q \vee r)$ 並列。這個排列就是假設前提皆真而結論為假的情況，如果演算的結果是這種情況不可能發生，那麼這個論證即為有效論證。反之，如果容許這種情況發生，那麼該論證就是無效論證。在進行分解的時候，真值樹系統並未規定必須從那一個語句開始分解，所以在演算過程中，先分解那一個語句，並不會影響結果。不過，為了演算簡單的目的起見，我建議從不會產生分枝的語句著手。在【例一】的分解中，第一步是採取將 $\neg(q \vee r)$ 分解成 $\neg q$ 和 $\neg r$，參考規則：

$$\neg(\varphi \vee \psi)$$
$$|$$
$$\neg\varphi$$
$$\neg\psi$$

可以發現 $\neg q$ 和 $\neg r$ 在同一分枝上。

第二步則是將 $(p \to q)$ 分解成 $\neg p$ 和 q，參考規則：

$$(\varphi \to \psi)$$
$$\diagup \quad \diagdown$$
$$\neg\varphi \qquad \psi$$

可以發現 $\neg p$ 和 q 是在不同的分枝上。此時右邊分枝中出現 $\neg q$、$\neg r$ 和 q，而 q 和 $\neg q$ 不可能同時成立，因此產生矛盾，根據規則：

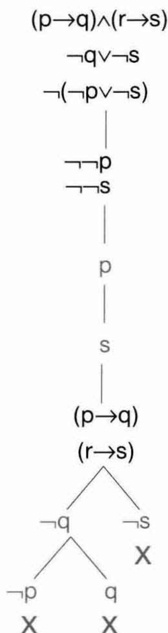
$$\begin{array}{c} | \\ \varphi \\ \neg\varphi \\ \text{X} \end{array}$$

在此分枝末端打上 x 的記號。而左邊分枝的 $\neg q$、$\neg r$ 和 $\neg p$ 並未產生矛盾，所以進行第三步，將 $(p \to r)$ 分解成 $\neg p$ 和 r，並且在不同的分枝上。而右邊的分枝中出現 $\neg q$、$\neg r$、$\neg p$ 和 r，其中 r 和 $\neg r$ 同時出現，因而在此分枝末端打上 x 的記號。另一方面，左邊分枝的 $\neg q$、$\neg r$ 和 $\neg p$ 並未產生矛盾，因此，分枝末端不畫任何記號。由於這個分解過程已將 $(p \to q)$、$(p \to r)$ 和 $\neg(q \vee r)$ 處理完畢，因而我們可以說徹底分解了此論證。

經過徹底分解，可以發現產生矛盾的分枝都被打上 x 的記號（如，最右邊的分枝中有 q 和 $\neg q$ 同時出現，稱為產生矛盾），而有一個分枝沒有被打上 x 的記號，就表示在某個可能情況下，允許前提皆真而結論為假。因此，這個論證是一個無效論證。

【例二】$(p \to q) \wedge (r \to s)$，$\neg q \vee \neg s$ / $\therefore \neg p \vee \neg s$





對【例二】進行演算時，一開始仍是將前提 $(p\to q)\wedge(r\to s)$ 和 $(\neg q\vee\neg s)$ 以及加了否定號的結論 $\neg(\neg p\vee\neg s)$ 並列。接下來開始進行分解，參考規則：

$$\neg(\varphi\vee\psi)$$
$$|$$
$$\neg\varphi$$
$$\neg\psi$$

第一步是將 $\neg(\neg p\vee\neg s)$ 分解成 $\neg\neg p$ 和 $\neg\neg s$，並在同一個分枝上。第二步是將 $\neg\neg p$ 分解成 p，參考規則：

$$\neg\neg\varphi$$
$$|$$
$$\varphi$$

第三步也是利用同樣的規則將 $\neg\neg s$ 分解成 s。第四步則是參考規則：

$$(\varphi\wedge\psi)$$
$$|$$
$$\varphi$$
$$\psi$$

將 $((p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s))$ 分解成 $(p\rightarrow q)$ 和 $(r\rightarrow s)$，並在同一個分枝上。接下來，第五步則是參考規則將 $(\neg q\vee\neg s)$ 分解成 $\neg q$ 和 $\neg s$，並在不同的分枝上：

$$(\neg q\wedge\neg s)$$
$$\diagup \quad \diagdown$$
$$\neg q \qquad \neg s$$

此時右邊分枝同時出現 s 和 $\neg s$，因此在分枝末端打上 x 的記號，表示此一分枝已產生矛盾。第六步則是參考規則：

$$(\varphi\rightarrow\psi)$$
$$\diagup \quad \diagdown$$
$$\neg\varphi \qquad \psi$$

將 $(p\rightarrow q)$ 分解成 $\neg p$ 和 q，並在不同的分枝上。此時我們會發現，在左邊分枝上同時出現 p 和 $\neg p$，因此在分枝末端打上 x 的記號，而在右邊的分枝中出現 $\neg q$ 和 q，所以也必須



在分枝末端打上 x 的記號。演算至此，由於所有的分枝均已打上 x 的記號，因此雖然還有 (r→s) 尚未分解，也不致影響演算結果。

將【例二】經過分解後，結果是所有的分枝都會導致矛盾的情況出現。這個結果意味著什麼呢？就是這個論證不可能有前提皆真而結論為假的情況出現，所以，這個論證是個有效論證。各位可以仔細比較一下，不管和公理系統或真值表法相比，利用真值樹系統的方法來決定論證有效與否，是否容易多了？

⑵表示無效論證的反例

經過真值樹的演算，如果論證是有效的，只要藉由真值樹的每個分枝都關閉的現象，就足以證明該論證是有效論證。但是，如果是無效論證的話，就必須以顯示反例 (counterexample) 的方式，說明該論證的確是無效論證。所謂的反例就是把使前提皆真而結論為假的情況寫出來。

按照先前的演算，由於【例一】的結果是尚有分枝未被打上 x 的記號，因此我們宣稱【例一】是一個無效論證。既然【例一】是無效論證，那麼根據對無效論證的要求，我們必須寫出使該論證前提皆真而結論為假的情況，也就是這個論證的反例。如何找出反例呢？首先在真值樹中，找出沒有被打上 x 記號的分枝，此一分枝可以用來證明前提皆真

而結論為假的情況出現。換言之，在 ¬p、¬q、¬r 均為真的時候，就會出現「前提皆真而結論為假」的情況。這個反例可以寫成下列的形式：

p	q	r
F	F	F

當我們用寫出反例的方法證明該論證為無效論證時，就算完成了整個演算步驟。為了更清楚了解為什麼這個情況會使前提皆真而結論為假，我們可以將此情況代入真值表看看：

	p	q	r	前提		結論
				(p→q)	(p→r)	(q∨r)
情況	F	F	F	T	T	F

圖⑭

經由圖⑭的真值表，不難看出在 p、q、r 均為假的情況下，前提皆真而結論為假，所以可以肯定該論證是無效論證。

用真值樹系統處理語句邏輯，解決了下列困難的問題：
1. 保證可以決定某個論證是有效論證或者是無效論證。
2. 避免真值表法必須列出許許多多的情況的大麻煩。
3. 不但如此，就連在公理系統中，所遇到的不知如何下手的陰霾，在真值樹系統中也一掃而空。



本章小結

邏輯學家們憑著不屈不撓的毅力，建構處理邏輯的不同系統，然而每個系統均有優點，也有缺點。作者建議採用真值樹系統乃是經過多年經驗，發現這個系統是最容易入手的。不過，如果讀者們只知道這個系統，而不知道其他系統的話，難免會產生「邏輯只有這樣?」的想法，這對一個認真思考的人來說，顯然是不夠的。所以這些系統是提供讀者們更寬廣的想像空間，經過不同系統的刺激，也許讀者能夠領會的將遠超出作者的想像。接下來，看看本章的重要概念吧!

- 公理：無須證明就可以確定為真的命題，或者可以說是不證自明 (self-evident) 的真理。
- 定理：僅由公理和推論規則就可推導而得的結論，稱為定理。
- 可決定性：存在某個有效程序，用以決定是否為某集合的一分子的性質。
- 反例：使某論證前提皆真而結論為假的可能情況，稱為反例。

	優　點	缺　點
真值表法	可掌握論證所有可能情況	步驟過於繁雜
公理系統	最簡潔的系統	不容易找到決定論證有效與否的程序
真值樹系統	決定論證有效與否的程序容易掌握	須預設等值概念

歐幾里得 (Euclid, ca. 300 BC)

著名的數學家，曾在亞歷山大城創辦一所學校。為了解釋平面中直線、曲線及空間中立體的特性，歐幾里得尋找各種定義、公理、公設來作為推理的基礎，以此基礎所建立的數學原理通稱為「歐氏幾何」(Euclidean Geometry)。歐幾里得所建立的幾何系統，沿用了兩千多年，直到 19 世紀中葉出現「非歐幾何」(non-Euclidean Geometry) 後，人類才被迫重新思考數學的基礎。



狄摩根 (Augustus De Morgan, 1806-1871)

多產的英國數學家、邏輯學家。在邏輯方面有許多深遠的貢獻，例如他首先提出論域 (universe of discourse) 的概念，是探討關係邏輯的重要概念。編修了所謂的狄摩根律、數學歸納法 (mathematical induction) 等等。



5

語句的進一步分析

炎炎夏日，郁芬和綺雯這對手帕交從捷運站走出來。悶熱的風硬是將兩人的汗水從皮膚裡擰了出來。郁芬撐著洋傘，挽著綺雯的手說道：「綺雯，妳瞧這鬼天氣真是超悶，我們走快點兒，到百貨公司裡逛一逛，順便吹免費的冷氣。省得在這裡多受罪。」綺雯點頭稱是，兩個人就三步併成兩步地快速朝著東區最大的百貨公司前進。

「呼！終於到了。沒想到連走這麼一小段路都是折磨。」綺雯一邊拭著汗一邊說道。「是啊！臺北的夏天真是受不了，又悶又熱的。還好這裡有冷氣吹，不然我一定活不下去。」郁芬應和著綺雯。兩個人露出一副從危難中脫困的微笑。在



偌大的百貨公司中，有很多像郁芬和綺雯這樣相邀逛街的手帕交，每個人都和同伴認真地討論衣服的款式。郁芬很喜歡看別人猛刷卡的樣子，她總是覺得這些人刷卡時的豪氣，她這輩子鐵定學不來。因為郁芬只是公司裡的小職員，一個月的所得也不過才二萬多塊。每次在逛街的時候，她總是看著別人拎著大包小包，拉著綺雯的手說：「妳瞧，那個人好猛喔！買這麼多是準備結婚了嗎?」綺雯總是笑著回答她：



「小姐，時代不同了。現代人喜歡先享受，後付款。」可是郁芬總是不服氣，「萬一付不出來怎麼辦呢？我很擔心自己刷了卡卻付不出來，所以每次買東西都很謹慎，不敢亂來。」綺雯還是顯出一貫的笑靨對著郁芬說：「現代人的第二特質，相信『船到橋頭自然直』的格言，反正總會有辦法的。妳就不必替他們擔心了，哈哈哈！」

郁芬看著別人刷卡的樣子，雖然知道充大頭的居多，還是很羨慕他們有這樣的勇氣敢這麼作。「綺雯，有時候我想想，我是不是應該也來個瘋狂大購物，學學這些人的勇氣。」綺雯聽了趕忙搖了搖手說：「千萬別！我的小姐。妳可別陷自己於絕境。妳知道我有多少朋友只為了滿足別人的眼光，老是喜歡充大頭。妳以為充大頭可以充多久？到了該付帳的時候，哪一個不是悔恨不已。況且，妳難道不知道我們的能力有限，除非真的有需要，否則何必給自己找麻煩呢？」從另一方面來看，郁芬也同樣羨慕綺雯樂天的個性。她不知道綺雯的自信心是從哪裡來的，綺雯總是可以很高興地告訴別人說她身上的衣服是 199 買來的，手上的戒指價值是 150。郁芬心裡總是覺得，能夠毫不避諱地告訴別人，自己的經濟能力有限這回事，是令人羨慕的個性。

兩個人逛著逛著，郁芬對綺雯說：「綺雯，我腳走得有點兒酸了。可不可以休息一下，我們到二樓去喝杯果汁好了。可以嗎？」「也好，我也想坐坐，走吧！」綺雯很爽快地答應著。走進滿是落地窗的咖啡廳，郁芬和綺雯不約而同地

都想挑落地窗前的景觀位置，看著熙來攘往的人潮，也是件趣事。

兩個人喝著果汁，正天南地北地聊著。郁芬心裡一直七上八下，她想今天邀綺雯出來其實是想告訴她，前一陣子她去參加高中同學會時，同班中有個男生，現在已經是三家便利商店的老闆。而這個當年被大夥兒叫做小飛的男生，寫了一封文情並茂的情書給郁芬，信中充滿仰慕之情，希望和郁芬交往。可是郁芬已經有個交往一年的男友，問題在郁芬總是覺得她的男友雖然人也老實忠厚，不過就是不懂得甜言蜜語，什麼事都是以理為先，從來不管女生的小性兒。更讓郁芬覺得難過的是，男友泰龍只是一個小送貨員，家裡經濟情況又不甚佳，他們最常約會的地點其實就是公園，餓了就到路邊攤胡亂吃點東西，渴了就到便利商店買礦泉水，然後坐在公園的長凳子繼續聊著。郁芬想要徵詢綺雯的意見，是不是應該接受小飛的追求。

「綺雯，我跟妳說一件事，妳不可以罵我喔!」郁芬懷著有點兒尷尬的表情說道。綺雯看著郁芬，說道：「郁芬，妳怎麼了？妳有什麼事儘管說，我們不是最好的朋友嗎？妳放心，我不會罵妳的。」聽綺雯這麼說，郁芬從包包裡拿出小飛寫給她的信，遞給綺雯。「綺雯，妳看。





這是我前陣子參加高中同學會時，我們班的一個同學叫做小飛寫給我的信，讓我心裡一直很不安，因為他不但信寫得好，而且還是三家便利商店的老闆。可是想想泰龍，不但一天到晚辛苦的要命，賺的錢又很有限。更不要說平常講起話來，都不能體諒我的心情，女生不就是有時候喜歡耍點兒小性子嗎？泰龍都不會讓我，還一天到晚跟我說些大道理。唉！」郁芬細聲地對著綺雯慢慢說道。



「嗯！我知道了，所以妳想跟泰龍分手，然後移情別戀，是吧？」綺雯一邊看著小飛寫給郁芬的信，一邊對郁芬說道。郁芬對綺雯表示她的確是這樣想的，因為對郁芬來說，泰龍在任何一方面來看，好像都不是理想的伴侶。而就在此時出現的小飛，不管在經濟能力上也好，學問上也好，好像都遠遠超過泰龍。在這種對比之下，怎麼能夠教郁芬不動心？

綺雯倒是爽快的笑了笑說：「郁芬，這種事很正常啊！我怎麼會罵妳呢？窈窕淑女，君子好逑啊。我知道妳在怕什麼，怕別人說妳不專情，是不是？」郁芬點了點頭表示同意。綺雯見狀便接著說道：「其實問題並沒有那麼複雜，有時候只是妳不知道自己的限制罷了。」郁芬聽了滿頭霧水地說：「妳說什麼？什麼我不知道自己的限制？那是什麼意思？」綺雯微笑地說道：「是啊，這沒什麼。其實妳只不過是想到

許多限制的問題而已。妳想想看，妳會想要移情別戀的理由是什麼呢？不就是經濟能力、學問高低、感情深淺等問題嗎？而這些都是限制的問題。」「妳可不可以說清楚點兒呢？綺雯，我不懂妳說的是什麼意思。」

「沒問題，我把它說清楚點兒，妳就會懂了。妳想想看，我們的收入每個月都只有兩萬多塊，所以我們自然而然地放棄我們可能去 CHANEL、GUCCI 等精品店消費的想法對吧，為什麼呢？因為我們需要有更強大的經濟能力，才能到這些店裡消費。而許多人不管三七二十一地買名牌是為什麼？當然是為了展現比別人更強大的經濟能力。當我們看到有人的經濟能力很強的時候，當然就會覺得她可以買的東西一定比我們多得多。這不就是我們的限制嗎？還有，就如妳常常抱怨，泰龍的情書寫得不好這件事情來看吧，那不就是因為他的學問限制嗎？如果泰龍能夠繼續擴展他的學問廣度和深度，那寫出來的情書就不會只是這樣了。」綺雯笑笑地對著郁芬說道。

「嗯！我好像有些兒懂了。所以我現在的困擾就是擔心自己的經濟能力不足，所以希望能夠倚靠一個經濟能力比較強的對象。或者說，有可能我自己創造更強大的經濟能力，那麼我就能夠突破這些限制了。」郁芬努力地回應著綺雯。綺雯也繼續說道：「是啊！沒錯。所以妳知道我為什麼能夠這麼自由自在，就是因為我知道這些限制，如果要到名牌的精品店消費，那麼我就必須有更強大的經濟能力。以我

現在的經濟能力，要求我去這些名牌店消費根本是不合理的。所以囉！那些經濟能力不足，卻又喜歡追逐名牌的人為什麼會崩潰呢？很簡單，只是因為她們以為可以完成超出自己限制的部分。這樣一來，哪能不出狀況呢？」

「了解自己的限制！」其實並不是件容易的事。每個人都希望追求無憂無慮、快樂幸福的生活，但是生活並不是盡如人意，因為我們經常會因為無法滿足自己的想望而感到悲傷。可是，為什麼會達不到自己的想望呢？其實有很多時候是不了解自己的限制所導致的後果。

在故事中的綺雯，非常了解自己經濟能力的限制。因此，她也了解如果要花大錢去買名牌的話，絕對不是充充大頭就可以解決問題，重要的還是要增加自己的經濟能力。可是，對郁芬來說，她並未深刻地了解自己在經濟能力上的限制。所以，如果她真的做了超出經濟能力的事，想必後果是不太樂觀的。為了避免造成遺憾的後果，郁芬的最佳策略當然是先了解自己的限制，再針對自己的限制定出提升自己經濟能力的方法。毫無疑問地，選擇一個可以提升自己經濟能力的伴侶是個方案。此外，兼差也是不錯的方法。

當然，這個故事的重點在於導引一個想法，就是在處理論證時，如何提升邏輯系統的處理能力？當然，學

習處理能力越強的系統，越能提升處理論證的能力。既然生活中的思考和溝通都需要論證能力，何不讓自己好好地提升能力呢！所以，本章要說明的是，其實語句邏輯系統的處理能力，無法滿足我們的需求，因此需要處理能力更強的邏輯系統，才能讓我們更得心應手地應付日常生活出現的論證。

語句邏輯無法處理的有效推論

截至目前為止，相信各位已經對語句（命題）邏輯有一定的認識。不過很不幸的是，如果我們只學會語句邏輯的推論技巧的話，立刻會遇到一個相當尷尬的問題——有些僅僅用直覺都可以輕易判斷的有效論證，利用語句邏輯處理時，該論證卻變成無效論證！如此一來，不就違背了原本想要利用邏輯，達到處理論證的目的！為了清楚地了解問題出在哪？讓我們回顧先前提過的論證：

(A12)

所有的人都有母親
秦始皇是人
―――――――――
所以，秦始皇有母親

論證 (A12) 非常簡單。只要憑直覺就幾乎可以肯定是有效論證。可是，如果以語句邏輯的方式處理，會有什麼結果



呢？首先把論證 (A12) 用語句邏輯的語言加以形式化：

(A12′)

p
q
———
∴r

p：所有的人都有母親
q：秦始皇是人
r：秦始皇有母親

只要用真值表法（圖⒆）來檢視論證 (A12′)，就可以知道論證 (A12′) 是一個無效論證。

首先，由於前提和結論中，一共出現三個命題符號，即 p、q、r。根據真值表的建構原則，會有 $2^3=8$ 種可能情況。

	p	q	r	前提		結論
				q	q	r
情況(1)	T	T	T	T	T	T
情況(2)	T	T	F	T	T	F
情況(3)	T	F	T	T	F	T
情況(4)	T	F	F	T	F	F
情況(5)	F	T	T	F	T	T
情況(6)	F	T	F	F	T	F
情況(7)	F	F	T	F	F	T
情況(8)	F	F	F	F	F	F



圖⒆

很明顯地，在情況(2)中，出現了前提皆真而結論為假的情況，根據語句邏輯對論證有效與否的判定而言，論證 (A12′) 顯然是無效論證。既然用來代表論證 (A12) 的論證形式 (A12′) 是無效論證形式，那麼論證 (A12) 就一定是無效論證。但是許多人會認為論證 (A12) 是一個有效論證，不是嗎？

不但如此，而且這種論證形式經常被用來說服別人。例如：所有的學生都應該遵守校規，某甲是學生，所以某甲應該遵守校規。這個論證顯然具有說服力，怎麼變成無效論證了呢！

其實最大的問題就出在符號所代表的對象上。在語句邏輯中被使用的命題符號，是用來代表一個一個的命題。對於語句所出現的語詞（名詞、動詞等等）並沒有給予獨立的解釋。換言之，就是將命題符號所代表的一整個語句，視為一個單位，而沒有繼續仔細分解這些語句的內容，因此顯示不出語句中語詞之間有什麼關係。例如論證 (A12′)，命題符號 p、q、r 分別代表「所有的人都有母親」、「秦始皇是人」、「秦始皇有母親」。從直覺上來看，人、母親、秦始皇會有某些關聯，這些關聯讓我們認為 (A12) 是有效論證。但是，從 p、q、r 這三個命題符號，卻無法看出這些語詞之間的關聯性。也正由於這個因素，語句邏輯在處理論證時，會遭遇某些限制。

有些人認為，這個問題是把論證形式化之後，才帶來的後遺症。所以為了避免這個困擾，乾脆就不要把論證形式化就好了。回到原來的語句不就好了嗎？這個想法可以接受嗎？聽起來似乎有些道理。只不過，這個想法會帶來一些困擾。⑴必須處理非常多的論證，因為每個論證彼此獨立。⑵沒有所謂的論證形式可以依循，就連相同類型的論證，彼此的關係也無法顯示出來。想想看，我們難道不會把 (A12) 和

(A13) 看成是同一種類型的論證嗎?

(A12)

所有的人都有母親
秦始皇是人

所以，秦始皇有母親

(A13)

所有的學生都應該遵守校規
某甲是學生

所以，某甲應該遵守校規

但是光從符號的排列，不能說 (A12) 和 (A13) 是同一種類型的論證。因為「秦始皇」跟「某甲」是不同的符號，而「學生」跟「人」也是不同的符號。所以，從文字符號的排列，根本無法理解這些文字符號之間有什麼關係。但是，由於字詞意義之間的關係，會讓我們在直覺上認定 (A12) 和 (A13) 是同一種類型的論證。所以，如何擴展邏輯系統，使得擴展後的邏輯系統可以用來處理這些語詞間的關係，就成了值得深入探討的課題了。接下來，就讓我們一起去尋幽探訪，發掘人類更深層的思考祕密吧!

語句文法與分類

既然只用表示語句內容的命題符號，無法顯示語句中語詞之間的關係。因此，要了解語詞之間的關係，就必須重新分析語句的結構。其實分析語句的結構，就好像在學習英

文的過程中，需要學習文法，以便了解組成語句的結構一樣。在英文文法中，可以勾勒出各種語詞所扮演的角色，諸如作為主詞的名詞、表示狀態的動詞、修飾動詞的副詞等等，所以藉由分析語句的結構，也可以了解這些語詞之間的關係。

聰明的你，可能會問：為什麼論證中出現的語句都是直敘句，而沒有出現問句或者祈使句呢？其實在論證中只出現直敘句，是因為只有直敘句才有明確的真假值，而問句或者祈使句並沒有明確的真假值，甚至可以說沒有真假值。

在古典邏輯的語意學預設中，我們所關注的是具有真假值的語句（參考第三章第二節的二值原則），當然就只對具有真假值的語句進行分析。所以我們只需要專注於分析直述句的語句結構就可以了。可是若遇上了複雜的直敘句又應該如何處理呢？幸運的是，複雜的直敘句可以分解成簡單的直敘句，所以，並不會造成太大的困擾。例如：「大衛是個勇敢的男人」，這個直敘句可以表示為「大衛是勇敢的而且大衛是男人」。因此即使是很複雜的直敘句，只要將它仔細分解，就不成問題了。

根據語句的結構來看，簡單的直敘句是由主詞 (subject) 和述詞 (predicate) 兩部分所組成的。例如：「達文西是畫家」，句子中的達文西就是主詞，而用來描述主詞的狀況「……是畫家」就是述詞。這個「主詞—述詞」的結構就是直敘句的語句結構。然而，「達文西」是什麼意思？「……是

畫家」又是什麼意思呢？這就涉及到如何解釋 (interpret) 這些語詞的問題。達文西這個語詞可以用來指 (refer) 文藝復興時代的那個人，但是如果我把家裡的那隻小狗取名為達文西，那麼達文西這個語詞，也可以用來指那隻小狗。如此一來，在句子中出現的達文西是指哪一個呢？這端看如何解釋達文西這個語詞而定，在稍後的篇章中會專門討論這個議題。目前只需要確定的是，無論達文西一詞作何解釋，在直敘句的語句結構中，主詞的功能就是用來指涉某個對象 (object)。

然而，述詞的功能又是用來代表什麼呢？試想想我們能夠形容的繽紛色彩，奇形怪狀，乃至於迷人香味等等，都是利用述詞才辦得到。所以，述詞就是用來指某個概念 (concept)。

另一方面，「對象一概念」的組合稱為判斷 (judgment)。判斷就是經由思考決定語句真假值的意思。

語句結構：	主詞	+	述詞	=	語句
	(subject)		(predicate)		(sentence)
判斷結構：	對象	+	概念	=	判斷
	(object)		(concept)		(judgment)

如何進行判斷呢？以上述的「達文西是畫家」這個例子來說，如果達文西指涉的對象是生存在文藝復興時代的那個人，

那麼達文西指涉的對象，是否符合「……是畫家」這個述詞所指的概念呢？對於稍有歷史知識的人，當然會認定「達文西是畫家」這句話為真。可是，如果在主詞位置出現的達文西，是用來指我家的小狗。那麼我家小狗顯然不會具有「……是畫家」所指的概念的特性。因此，在這個解釋下，我們可以判斷「達文西是畫家」這句話為假。所以，「達文西是畫家」這句話，在某些解釋下可以判斷為真，而在某些解釋下判斷為假，關鍵絕對不是在語句本身，而是如何解釋語句中出現的語詞。

為了能夠更清楚地顯示這些語詞之間的關係，可以用分類的方法來理解。假設你判斷「所有的人都有母親」這句話為真，那麼你的根據就是人這個集合是包含在有母親的這個集合中（圖一）。或者當你判斷「所有的人都是自私的」這句話為假，意思就是人這個集合並不包含在自私這個集合中。關於用集合的方式理解語詞之間的關係，起源相當早。但是真正用圖解的方式畫出來，卻是晚近的事了。讓我用簡單的圖形呈現上述的例子：



圖一

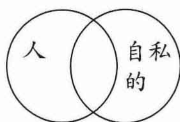
上面的圖形很清楚地顯示了從屬關係，有母親的集合中不



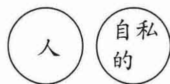
只有人類，還有其他動物也都有母親，所以這個圖形就顯示了人和有母親兩類東西之間的關係。



圖二



圖三



圖四

另外，如果你宣稱「所有的人都是自私的」這句話是假的，那麼圖二、三、四都是可能的情形。讓我們仔細思考這些圖形的意義。圖二的意義是：所有自私的都是人，而有些人是自私的，但是有些人是不自私的。圖三的意義則是：有些人自私，但是有些人不自私。然而，也有些自私的不是人。最後，圖四的意義為：所有自私的都不是人，人都是不自私的。因此，當你宣稱「所有的人都是自私的」為假時，是否認真地思考過，你是根據哪一個圖形所顯示的意義所做的判斷呢？

利用這些圖形來理解語詞的關係，對思考的助益很大。因為平常說話的時候，很少人會去反省自己話中的含意，有時候更造成不必要的誤會，所以利用圖形去理解彼此在說話中的含意，也是不錯的樂趣。各位讀者不妨試試看，相信會大有收穫！

用以標示範圍的量化詞

對組成語句的語詞之間的關係有初步了解後，接下來就要討論限定語詞範圍的詞。

在日常生活中，我們經常使用所有的 (all)、有些 (some)、大部分 (most)、少數 (few) 等等來傳達意思，這些用來標示談論範圍的語詞稱為量化詞 (quantifier)。有些人善於利用改變量化詞的技巧，來躲避可能招致的批評。假設有個人主張：「所有人都是自私的」。當你舉出德雷莎修女、證嚴法師具有犧牲奉獻的美德之後，為了躲避質疑，此人也許會改口說：「喔！不。不是所有的人都是自私的，而是『大部分』的人都很自私」。其實利用「大部分的人都如何如何」的說法，是大有問題的。因為我們要如何確認大部分的人？這種用法通常缺乏根據。當然，宣稱「只有『少數』的人是自私的」，也會遭遇相同的問題，如何認定少數呢？

既然在日常語言中會使用到量化詞，那麼在設計邏輯語言時，當然也必須將量化詞納入考量。只是，需要幾個量化詞來標示談論的範圍呢？為了簡單起見，邏輯學家只用兩個量化詞：

(1)用來談論整個集合的個體的量化詞——「所有的」。

(2)用來談論集合中的某些個體的量化詞——「有些」。



不過，顯然有許多量化詞無法用這兩個量化詞表現出來，例如上述的「大部分」、「少數」等等。因為要標示出大部分或者少數這類量化詞，會用到或然率 (probability) 的演算，而引進或然率設計的邏輯系統，相形之下會變得更加複雜。因此，在這個階段，並不需要特別考慮這個問題。

首先，語詞代表了由個體所形成的集合 (set) 或類 (class)。例如，人這個語詞就是由被視為人的這些個體所形成的集合。因此，兩個語詞就有兩個集合的個體，這兩個集合的關係，會產生四種不同的情形。這四種情形可用上一節的四個圖形加以說明。先將圖一改成圖五。如此一來，圖二、三、四、五便窮盡了這兩個集合所有可能的關係。



圖五

▶圖五：「所有的人都是自私的」。
▶圖二：「所有的自私的都是人」。
▶圖三：「有些人是自私的」，也同時顯示「有些人不是自私的」以及「有些自私的不是人」。
▶圖四：「沒有任何一個人是自私的」。

這裡，有一個非常重要的預設——存在預設 (existential import) 必須先說明。什麼是存在預設呢？就是預設符合語詞概念的個體所形成的集合，都不是空集合。換言之，就是保證在每個集合中至少有一個個體存在。這個預設相當的重要，也會影響推論上的問題。例如，在「所有的人都是動物」成立的情況下，主張「有些人是動物」成立是毫無問題的。因為既然「所有的人都如何如何」，那麼「有某些人存

在而且如何如何」，是想當然爾的結果。但是在「所有火星人都是好人」成立的情況下，能否推論出「有些火星人是好人」呢？顯然會有點兒麻煩，因為火星人真的存在嗎？即使在肯定「所有火星人都如何如何」的情況下，也無法肯定一定有「某些火星人存在而且如何如何」。這個推論過程要成立，就必須先預設每當使用所有的這個量化詞時，就預設談論的集合不是空集合才行（也就是，火星人必須真正的存在）。根據作者的經驗，在日常生活的交談中，鮮有發生存在預設不成立的對話。因此，在日常對話中，可以直接假設這個預設成立，不過，如果讀者要深入研究哲學領域的話，就必須進一步了解這個預設所帶來的爭議。由於這個爭議十分繁瑣，因此不在此處理。

含有量化詞的語句，根據語詞的概念所形成的集合之間的關係，基本上可以分成四種類型：

全稱肯定句型（以 A 表示）	
所有的 P 都是 Q	All P are Q
全稱否定句型（以 E 表示）	
沒有任何一個 P 是 Q	No P are Q
存在肯定句型（以 I 表示）	
有些 P 是 Q	Some P are Q
存在否定句型（以 O 表示）	
有些 P 不是 Q	Some P are not Q

這四種句型之間有許多關係值得研究，這些關係對如何進

行正確的推論也非常重要。其關係表示如下：

(i) A 和 O 是矛盾的：所謂矛盾的意思就是其中一個為真，另一個一定為假。
(ii) I 和 E 是矛盾的。
(iii) A 和 E 不能同時為真，但可以同時為假。
(iv) I 和 O 可以同時為真，但不能同時為假。
(v) A 蘊涵 I：當 A 為真時，I 也同時為真。
(vi) E 蘊涵 O：當 E 為真時，O 也同時為真。

以關係(i)來說，假設有個全稱肯定句型（A 語句）是：「所有的人都是動物」，那麼存在否定句型（O 語句）就是：「存在著有些人不是動物」。這兩個語句（A 語句和 O 語句）的矛盾是很清楚的。因為既然肯定了所有的人都是動物，就不可能有任何一個所謂的人不是動物。或者反過來說，如果有存在著一個所謂的人不是動物，那麼就意味著「所有的人都是動物」這句話為假。其他的關係都可以用類似的方式驗證，相信不難理解。不過值得注意的是，在(v)中，A 蘊涵 I，就已經認定存在預設成立。也就是說，如果存在預設不成立的話，那麼(v)也不會成立。因此，相信各位可以了解存在預設對於語句判斷的影響是很大的。

上述的基本句型結構，都是根據所有的和有些這兩個量化詞作為標示範圍的語句。為了方便起見，我們用 ∀(for

all) 來表示全稱量化詞，用 ∃(for some) 來表示存在量化詞。

語詞的內涵和外延

經過先前分析語句結構的討論，我們了解主詞和規範主詞範圍的量化詞。接下來，我們要進入述詞的部分。了解語句中每個組成語詞的功能，就可以更清楚邏輯所需要的工具，以及適當的處理方法了。

述詞所代表的概念是個非常有趣的領域，但要精確定義概念並不容易。不過，從日常生活的想法出發，倒是個不錯的起點。毫無疑問地，當每個人說話的時候，都會使用到許多概念，例如在：「這張桌子是白色的」這句話中，出現了桌子的概念和白色的概念。通過對桌子的概念，可以認定眼前的這個物體是一張桌子。通過白色的概念，可以確定這個物體符合白色這個概念的內容。換言之，當我們使用語言描述這個世界時，是通過語詞的概念來掌握世界，或者和別人溝通。

概念在溝通行為上，占有非常重要的地位。舉例來說，如果有某個人問你：「愛因斯坦是誰?」而你只回答：「愛因斯坦就是愛因斯坦那個人」。對方不但會露出疑惑的眼神，還會想著怎麼會有人這麼回答呢? 況且，這個回答和沒有回答沒什麼不同。為什麼呢? 因為就算你不說這句話，他也知道「愛因斯坦就是愛因斯坦那個人」。既然如此，對方希望

得到的是什麼樣的答案呢?

其實我們希望的是，藉由你所說的話，可以讓對方增加對語詞所指涉的對象的了解! 大家都知道，將原有的語詞重複一遍並不是說明，而使用其他的語詞（例如形容詞）來描述原有的主詞，才稱得上是說明。通過增加某些概念的方式才可以進一步了解，語詞所指涉的對象具有什麼性質。例如，「愛因斯坦就是《相對論》的作者」、「愛因斯坦就是上書給羅斯福總統促成曼哈坦計畫的那個人」等等。這些放在語句中的述詞，用來描述這個個體特性的部分，就是用來表達某個概念。所以，根據上述的語句，可以想像有一個概念是「……是《相對論》的作者」，也有一個概念是「……上書給羅斯福總統促成曼哈坦計畫的那個人」。

我們所想像的這些概念內容，就是語詞的內涵 (intension)。換言之，愛因斯坦這個語詞所指涉的對象（就是愛因斯坦這個人），滿足「……是《相對論》的作者」這個概念，也滿足「……上書給羅斯福總統促成曼哈坦計畫的那個人」這個概念。所以，「……是《相對論》的作者」和「……上書給羅斯福總統促成曼哈坦計畫的那個人」都是「愛因斯坦」這個語詞的內涵。

就好比認識朋友的過程中，每次確定對方符合某個概念時，我們對他的認識也就更增加一分。因此，當你知道越來越多符合你的朋友這個個體的概念時，你會說你對他的認識越來越深。再假設有一起搶案發生，當被害人到警局報

案，警方一定會詢問搶匪的特徵。警方詢問特徵的目的是什麼呢？就是希望依據被害人所描述的各種特徵去尋找搶匪，而所謂的特徵其實就是一個又一個的概念。

沿著這些概念的線索，警方會開始找尋符合這些特徵的人，而符合這些特徵的人，就是搶匪這個語詞的外延 (extension)。因此，如果被害人在警局裡只說：「搶匪就是搶匪」，我們能說他說錯了嗎？其實他並沒有說錯什麼，只是警方無法建立適當的線索，去找到所謂的搶匪的外延是哪一個。在日常生活中，建立適當的線索，去決定語詞所指涉的對象，顯然是相當重要的。

語詞（「搶匪」）┬ 內涵──概念（搶匪的各種特徵）
　　　　　　　　└ 外延──對象（搶匪這個人）

語詞具有兩個面向，一個面向是這個語詞的內涵，就是用來決定哪些個體符合這個語詞的概念。而另一個面向，就是語詞的外延，是由這個語詞所指涉的對象所形成的集合。

經過語句的進一步分析，各位是否覺得自己平常在說

內涵及外延 (intension and extension)

按照弗雷格的說法，一個語詞的意義包含了兩個部分──(1)內涵或意涵 (intension or sense)，是呈現個體的模式 (the mode of representing an object)；(2)外延或指稱 (extension or reference)，是語詞所指涉的個體。而具有相同指涉對象的語詞，可能以不同的模式來呈現。例如，晨星和暮星這兩個專名，就是透過不同的模式呈現同一個指涉對象金星。



話時，其實玄機處處呢？是的，平常我們只是大而化之，不願面對自己在談話時所暗藏的玄機而已。所以，當你願意開始認真反省自己話語中的問題時，你很快就會成為說話精確、分析條理清楚的談判高手了。

范恩圖解 (Venn diagram)

由英國邏輯學家范恩 (John Venn, 1834-1923) 於 1880 年所提出來的一種邏輯圖解，標準的陳述句可由兩個適當標記後的交叉圓來表示。而三段論證可由三個交叉圓表示。按照三段論的陳述標示，可以用來檢視該論證是否為「有效論證」的方法。范恩於 1853 年進入劍橋大學，並在 1883 年成為英國皇家科學院的研究員。其重要著作包括 1881 年出版的《符號邏輯》及 1889 年的《經驗主義邏輯的原則》。



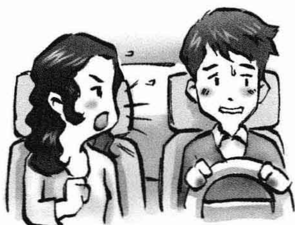
本章小結

在生活的每個領域中，激發人們努力向上的動力之一，就是體會到自己的限制。而在本章中努力刻劃的，正是邏輯學家們認清了語句邏輯限制之後，盡其所能地再把語句分解成更小的部分，也因此反省到許多原來沒有意識到的問題。其實，讀者們應該也有類似的感受，每個人都希望生活過的越來越好，而生活要過得更好，就是要認清自己的限制，進而設法突破自己的限制，才能活得更好。同樣地，讓我們再瀏覽一下本章的重要概念吧!

- 語句結構：語句可視為由主詞和述詞兩部分所組成。
- 判斷結構：判斷意謂了解對象與概念之間的關係。
- 量化詞：用來規範對象數量的符號，以 ∀ 代表所有的，以 ∃ 代表有些。
- 存在預設：預設語句所談論的對象一定存在，稱為存在預設。
- 內涵：語詞的意義。
- 外延：語詞所指涉的對象。

6

一階邏輯語言及語意學



「哼！你們男人都一樣。不尊重女生，沙文主義豬。」如君一邊說著，一邊忿忿地關了車門。在一旁握著方向盤的駿逸，因為沒來由的一頓斥責而顯得手足無措。「怎麼了，誰惹了我的小公主啊！」駿逸緩緩將車駛入快車道，希望藉著輕聲細語的慰問平復如君的心情。

「還不是那個死老頭，仗著自己是副總，了不起喔，居然在業務會議上說什麼女性同事的腦筋轉得慢，業務員必須體諒一下。開什麼玩笑，我覺得那些臭男生才是豆腐腦，一根腸子通到底，每個做起事來，脾氣都跟糞坑裡的石頭一樣，又臭又硬。我們這些內勤人員又不是他們的肌肉組織，他們想怎麼動就得怎麼動，哪有這回事？大家需要協調嘛！尤其那個臭副總，說什麼業務是公司的命脈，所以內勤人員要盡量配合業務員的需求。我們也是人耶！明明就是業務員的問題，還怪我們沒有效率。」如君霹哩啪拉地說了一大串。

駿逸聽著覺得有點兒奇怪，望了如君一眼說道：「可是……」「可是什麼啦，趕快說啦。本小姐現在可是耐性不足。」駿逸瞧出如君的火冒得可凶了。「沒什麼，我只是想問妳，不就是業務員和內勤人員的問題嗎？跟什麼大男人沙文主義有什麼關係？」駿逸怕惹得如君更生氣，只敢小聲地說著。沒想到駿逸說的話好像刺中了如君的罩門一樣，如君說得



更是火氣十足：「就是說啊！業務就業務啊，內勤就內勤啊！幹嘛沒事扯到女人身上？真是很想破壞氣質來罵人。你知道我們副總說什麼嗎？『女性同事腦筋轉得慢』，你知道嗎？女……性……耶！他憑什麼藐視我們女性。你說，他是不是大男人主義？沙豬！哼！」駿逸聽著聽著，覺得自己挺冤的，明明是公司的副總的問題，自己卻遭了無妄之災。「妳說得是沒錯啦！可是……」駿逸依舊不敢大聲地說。「別可是可是啦，你到底要說什麼，別吞吞吐吐的」，如君沒好氣的說著。「好啦！我的意思是說，說這話的不是妳們公司的副總嗎？那妳幹嘛這麼生氣呢？不就是他一個人這麼說而已嗎？」駿逸解釋著他的想法。

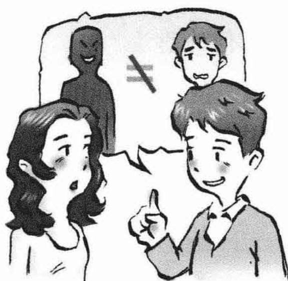




「對啊！如果只是副總一個人說，我就不會那麼生氣。可是你知道嗎，那堆臭男生就跟著副總起鬨。一下子這個發言說：『女性不知道應變啦！』一下子那個說：『女性總是慢半拍啦！』甚至有人說：『女性趕不上業務員進步的腳步！』你倒說說看，這堆沙豬是不是讓人很生氣，哼！」如君恨不得把業務會議上受的委屈，一股腦兒地發洩出來。

「是啊！妳說得有道理。可

是……」駿逸怕如君在氣頭上發作，一副欲言又止的樣子。「你又在可是了，可是什麼呀？你倒是說啊！」其實如君心裡知道駿逸怕她生氣，所以口氣也軟化了下來。駿逸感受到如君的和緩，微笑著對如君說：「我只是覺得我挺冤枉的，因為妳剛剛一上車就說——『男人都怎樣怎樣！』好像全天下的男人，都成了妳說的『沙豬』，可是至少坐在妳旁邊的我——妳心愛的駿逸，不是這樣的人吧！」如君聽著駿逸輕聲細語的說詞。當然心裡也明白，自己不該遷怒駿逸。可是剛剛在公司受的氣，就是想要發洩出來。



「好啦！駿逸，我知道我錯了，我不應該遷怒於你。」如君雖然嘴裡說著道歉，心裡可是一股甜蜜勁兒。因為駿逸總是這麼溫柔，體貼地對待自己的壞脾氣，如君心裡可驕傲著呢。駿逸看著重展笑顏的如君，也感受到如君的歉意，於是他對如君說：「小公主，其實妳剛剛說的沒有錯。」「什麼！我沒有錯！」如君對駿逸突如其來的發言，覺得挺錯愕的。「你不用安慰我了，駿逸。我已經不那麼生氣了，錯了就錯了，我並不是個不勇於認錯的人啊。」駿逸聽如君說完，迫不及待地對著如君說道：「親愛的，妳真的沒有錯，我並不是安慰妳。只是有時候，我們會搞不清楚對方說話的意思，而誤會也就出現。待會兒吃飯的時候，我慢



慢講給你聽，妳聽我說完就知道了。」如君伸了伸舌頭，對駿逸說：「大專家，我洗耳恭聽囉！」

駿逸早就預定好餐廳座位，將車停妥後，帶著如君進入餐廳。如君撒嬌地對著駿逸說：「駿逸，你對我最好了，我最喜歡你了，你跟那些臭男人不一樣。」駿逸笑著回答如君：「這正是我要跟妳說的！我剛剛會跟妳說，妳說的並沒錯，就是這個意思。」如君一臉疑惑地問道：「這有什麼關係呢？駿逸，你可把我搞糊塗了。」

駿逸仍掛著自信的笑容，溫柔地對如君說：「妳想想看，妳不是說：『男人都是沙文主義者』嗎？」如君接著駿逸的話頭說道：「是啊！那又怎麼樣呢？我已經知道不應該這麼說了啊！」駿逸擺了擺手說道：「小公主，妳倒是想想看。如果妳說『男人都是沙文主義者』的時候，所謂的『男人』只是指妳們公司裡的男人，那這句話當然沒錯吧。但是如果妳把『男人』解釋成『地球上所有的男人』，那我就會受到無妄之災了。所以妳並沒有說錯話，只是如何解釋『男人』這個語詞罷了，妳知道了嗎？」

聽了駿逸的說法之後，如君興奮地說：「哈！我懂了，大專家。原來我並沒有說錯話，只是『如何解釋』的問題而已。」駿逸也笑了笑，繼續說道：「對啊！這麼一來妳就知道，我受到的委屈有多大了吧！因為妳在解釋『男人』的時候，是不是也把我算在裡面呢？」「才沒有呢！人家才不會這樣呢！」如君刻意用小鳥依人的聲音，央著駿逸說道。「所以，

請妳以後看新聞的時候，當那些鬧緋聞的男藝人啦，還是企業小開啦！他犯了全天下的男人都會犯的錯的時候，可別指著我說，是不是以後也會這樣見一個愛一個。因為，他們所說的男人，可不包括我在內。」「知道了，大專家！謝謝你的醍醐灌頂，讓無知的小女子可以茅塞頓開，原來簡簡單單的一句話，還挺有學問的呢。」如君堆著滿臉的笑意對著心愛的駿逸說。「可不是嗎！不是常常有很多人，就是因為這樣而產生誤會嗎？就像妳剛剛上車的時候，雖然我明知惹妳生氣的人不是我。可是，我可沒有十分的把握，沒被妳畫進『那群臭男人』的範圍裡面。所以我得搞清楚，才敢這麼說。」

如君聽了之後，趕忙著對駿逸說：「駿逸！我相信你不會這樣的。所以你不必擔心，我不會把你看成那群臭男人的一份子。」「感恩喔！我可愛的小公主。」駿逸帶著滿意的笑容邊說著。「好，大專家。別只顧著講話，忘記我們這頓浪漫的晚餐喲！」「說的也是，講話講多還真的會餓呢！」駿逸端起盛著紅酒的水晶杯，對著如君說：「親愛的小公主，祝福妳笑口常開，妳笑起來就是天下最美麗的人了。如果大夥兒都像妳一樣，肯把自己說的話弄清楚點兒，世間上的誤會就會少了許多吧！」如君也端起酒杯，和駿逸的酒杯輕輕地碰了一下，「我完全同意你的說法，大專家！」



在這個故事中，充分地顯示了在日常生活中，我們所使用的語言是相當複雜的。而語句邏輯僅能處理以句子為單位的論證，一旦涉及談論個體範圍不同的時候，語句邏輯就顯得無能為力。而在故事中可以清楚地看到，同樣的一句話，會因為討論範圍的不同，而出現真假值相左的結果。

簡單來說，假設你到動物園遊玩，當你走到猛獸區的時候對你的同伴說：「所有的動物都好兇喔」。如果你的同伴聽了之後表示不同意，而且對你說：「不會啊！可愛區的動物一點兒也不兇。」此時，兩個人的爭執就是談論範圍的問題。你的說法是只考慮猛獸區的動物，但是你的朋友所考慮的是整個動物園的動物。在不同的解釋下，「所有的動物都好兇喔！」就會有不一樣的結果。以你的解釋來說，這句話毫無疑問是真的。但是，換成你的朋友的解釋，這句話顯然就是假的。所以在故事中，當兩個人把「男人」這個語詞談論的範圍弄清楚之後，原有的疑慮也就消失了。

因此，在這個章節中，我們要學習如何設計適當的一階語言，並且學習如何賦予解釋等等。通過一階邏輯的學習，必然可以大大提升你的思考能力，當以後遇到問題的時候，就可以用簡單的方式解釋給別人聽，自然生活也能愉快些了。

何謂一階邏輯語言

一（初）階邏輯 (first-order logic) 又稱為述詞邏輯 (predicate logic)。但是一階邏輯語言中的一階 (first-order) 是什麼意思呢？所謂的一階是指，在語言中的量化詞，談論的對象僅限於個體而言。例如，S_1：「蘇格拉底是個哲學家」，由於蘇格拉底所指涉的對象是一個個體，因此稱為一階個體 (first-order object)，而用來談論一階個體的述詞，所談及的性質「……是個哲學家」就稱為一階概念 (first-order concept)。

如何判斷 S_1 是否為真呢？就是看看蘇格拉底這個名詞所指涉的對象（亦即蘇格拉底這個人），是否擁有「……是個哲學家」這個性質，如果有，那麼語句 S_1 為真；反之，則為假。

再考慮語句 S_2：「哲學家是勇敢的」。在 S_2 中，「哲學家」出現在主詞的位置，因此根據主詞所扮演的角色，S_2 中的哲學家應該是指某個個體。但是，在世界上顯然沒有一個個體是哲學家，因此哲學家必須被視為是抽象的個體，而非現實存在的個體。可是，即使我們認同在抽象世界中有哲學家這樣的個體存在，然而在 S_1 中哲學家是個概念，而在 S_2 中，哲學家卻是個個體，是否容易造成混淆呢？也就是說，在日常生活中我們通常不在意地使用這些語詞，但是在邏

輯系統中，每個語詞的使用卻必須正確地歸類。因此，如果 S_1 和 S_2 同時出現時，為了能夠明確區分使用語詞的情況，就將 S_2 中出現的哲學家稱為二階個體 (second-order object)，把「……是勇敢的」這個談論二階個體的述詞，稱為二階概念 (second-order concept)。因此，如果再出現 S_3：「勇敢是美德」時，S_3 中的「勇敢」就當作三階個體 (third-order object) 而用來談論三階個體的述詞，稱為三階概念 (third-order concept)，依此類推。所以，所謂的一階邏輯，就是指邏輯系統中的量化詞僅用來談論一階個體。當量化詞談論的範圍包括二階或更高階的個體，就稱為二階邏輯或高階邏輯 (higher-order logic)。這樣，大家應該知道什麼是「一階」了吧！一階邏輯其實是語句邏輯的擴充，用來處理語句邏輯無法處理的論證。回憶一下論證 (A12)：

(A12)

所有的人都有母親
秦始皇是人

所以，秦始皇有母親

直覺上，論證 (A12) 是可以接受的有效論證，然而，以語句邏輯的方式處理，卻變成無效論證。在這種情況下，重新分析語句的結構（主詞一述詞），成了非常重要的工作。既然語句的結構分成主詞和述詞，那麼在一階邏輯語言中，我們也需要引進一些新的符號，用以標示主詞所指的對象和述詞所指的概念。

⑴主詞、主詞所指的對象

有時候，主詞所指的對象是非常明確的，如秦始皇這個名稱，就是用來指涉某個特定對象（即，結束戰國時代、統一六國的皇帝），此時我們稱秦始皇這個主詞為專名 (proper name)，並且以小寫的英文字母來代表他（例如，用 a 代表秦始皇）。這種以英文小寫 a, b, c, d... 代表明確的特定對象的符號，邏輯上稱為個體常元 (individual constant)。

可是有時候，主詞所指的對象卻不是那麼明確，這時用來代表不明確對象的符號，稱為個體變元 (variables)。其符號為小寫的英文字母：x, y, z...。什麼時候需要用到個體變元呢？以下為例：

「凡是人都○○○○」

=「對所有的對象而言，如果這個對象是人，那麼這個對象○○○○」

=「對所有的 x 而言，如果這個 x 是人，那麼這個 x ○○○○」

使用個體變元的原因，是為了便於表示非特定對象。在邏輯語言中，如果只有個體常元而沒有個體變元的話，那麼會造成很大的困擾。如果語句中出現的「所有的人」，所指涉的對象只有三個，那麼用個體常元的句子重複三次，亦即

「a ○○○○而且 b ○○○○而且 c ○○○○」就可以了。但是想想看，如果所有的人指的是 100 個、1000 個，甚至無限多個，那表示起來不是太複雜了嗎？難道真的要寫出 100 人如何如何？1000 人如何如何嗎？所以囉，在邏輯語言中增加個體變元可以消除這方面的困擾。

另外，函項 (function) 也是經常被用來表示個體的方式，例如「蘇東坡的父親」並不是一個句子，而是指某個人。所以，當「……的父親」出現時，則是代表某個個體。這種表示個體的方式，非常類似數學中計算函項的方式。把「……的父親」當成一個函項看待，在空白處加上個體常元，就會知道整個詞用來指涉的個體。例如放入蘇東坡，就是指蘇東坡的父親這個人，放進徐志摩，就是指徐志摩的父親這個人等等。

> 當邏輯語句出現這類符號 a, b, c, d 時，並不能決定該符號代表的對象是哪一個。此時透過解釋的方法，決定符號所代表的對象，這就是語意學 (semantics) 所研究的課題。

a：蘇東坡

b：蘇東坡的父親

函項符號 f：……的父親

那麼 f(a) 就是蘇東坡的父親，也就是符號 b 所標示的個體，也可以用 f(a)=b 表示。

> 既然 f(a) 和 b，同樣都是指蘇東坡的父親這個人，當我們決定採取這種表示方法，就是在語言中增加等同符號「=」(identity)。然而值得注意的是，在一階邏輯語言中，不一定需要等同符號。事實上，有許多書籍談論一階邏輯語言時，並未包含等同符號。

⑵述詞、述詞所指的概念

接下來是述詞的問題。在一階邏輯語言中，通常是用大寫的英文字母 P, Q, R...... 來標示述詞所談論的概念。舉例來說，「秦始皇是人」這句話，按照語句的結構，可以分成兩個部分：「秦始皇」和「……是人」。秦始皇顯然用來指明確的特定對象，因此用個體常元 a 標示，而「……是人」則用述詞符號 P 標示。而 Pa 就用以標示「秦始皇是人」這個語句。如果用變元標示非明確的對象，Px 的意思就是「x 是人」。必須要注意的是，要用符號 P 標示什麼述詞，端看使用符號的人決定。換言之，述詞符號 P 並沒有固定的解釋。這類沒有固定的解釋的符號，稱為非邏輯符號 (non-logical symbol)。除了用來標示個體和述詞的符號之外，還有用來標示範圍的兩個量化詞，即所有的：∀ 和有些：∃。

在原有語句邏輯語言的基礎上，再增加新的符號，就成了一階邏輯語言的符號（見下頁）。

要描述一個語言，並不是光把符號列出來即可，還要說明語句的形構規則 (formation rules) 才行。了解語言中語句的形構規則，才能排列出符合語法的語句。

首先，是被稱為原子語句 (atomic sentence) 的部分：



(i)	命題符號：	$p, q, r, ..., p', q', r', ...$
(ii)	連接詞：	$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$
(iii)	輔助符號：	(,)
(iv)	個體常元：	$a, b, c, ..., a', b', c', ...$
(v)	個體變元：	$x, y, z, ..., x', y', z', ...$
(vi)	述詞符號：	$P, Q, R, ..., P', Q', R', ...$
(vii)	函項符號：	$f, g, h, ..., f', g', h', ...$
(viii)	等同符號：	=
(ix)	量化詞：	$\forall$ 和 $\exists$

(i)所有的命題符號 p_i 所標示的都是一個原子語句。

(ii)所有以等同符號連接兩個個體的語句是原子語句，其形式是 a=b。

(iii)如果 P^n 是一個 n 元述詞，那麼 $P^n(a_1, ..., a_n)$ 是原子語句。

(iv)除上述的語句外，沒有其他的原子語句。

介紹過原子語句之後，接下來要說明的是複合語句(compound sentences)。

(i)所有的原子語句都是合法的語句。

(ii)如果 φ 是一個語句，那麼 $\neg\varphi$ 也是一個合法的語句。

(iii)如果 φ 和 ψ 都是語句，那麼 $(\varphi\wedge\psi)$、$(\varphi\vee\psi)$、$(\varphi\rightarrow\psi)$、$(\varphi\leftrightarrow\psi)$ 都是合法的語句。

(iv)如果 φ 是一個語句，那麼 $\forall x\varphi(x)$ 和 $\exists x\varphi(x)$ 也是合法的語句。

(v)除了上述的語句外，沒有其他合法的語句。

解釋與論域

(1)解釋

所謂「解釋」(interpretation) 就是說明符號的意義為何。由於在一階邏輯語言中，加入了新的符號用來標示各類語詞，因此了解這些符號的意義是非常重要的。為了更清楚地理解這些符號在意義上的差異，我們可以把一階邏輯中出現的符號分成兩類：邏輯符號和非邏輯符號。

所謂邏輯符號是具有固定意義的符號。不管這個符號出現在哪一個邏輯系統中，都不會有不同的解釋。例如，連接詞 $\wedge$ 就是而且的意義，不管這個符號出現在哪裡，這個意義都不會改變。

【邏輯符號】

(i)連接詞：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。



(ii)個體變元：$x, y, z, \ldots, x', y', z', \ldots$

(iii)量化詞：$\forall$ 和 $\exists$

(iv)等同符號：$=$

(v)輔助符號：(,)

然而，非邏輯符號卻不是如此，符號並沒有固定的意義，而必須經過解釋的過程，我們才知道該符號的意義。例如，述詞符號 P 出現時，這個符號被用來標示什麼概念，則必須經過使用者解釋，才能決定其意義。符號 P 可能被用來代表——「……是人」或者「……是哲學家」或者「……是紅色」等等。換言之，述詞符號並未被固定標示哪一個概念，因此被稱之為非邏輯符號。

【非邏輯符號】

(i)命題符號：$p, q, r, \ldots, p', q', r', \ldots$

(ii)個體常元：$a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$

(iii)述詞符號：$P, Q, R, \ldots, P', Q', R', \ldots$

(iv)函項符號：$f, g, h, \ldots, f', g', h', \ldots$

在日常生活中，有許多的爭執就是對非邏輯符號的解釋不同，造成許多爭議。例如某家建商把建築工地稱為「總統官邸」，難道指的是總統住的官邸嗎？當然不是，所以沒有搞清楚這些符號的意義，可是會鬧笑話的喔！

⑵論域

在日常對話中，另一個經常帶來困擾的情況，就是沒有說清楚量化詞所談論的範圍。例如當我說：「所有的人都是自私的」時，我的目的是用所有的人指涉我所認識的人，而不包括我所不認識的人。但是，如果沒有清楚地標示談論的個體範圍，顯然很容易造成誤解。換言之，我並沒有接觸到地球上所有的人，怎麼能說「所有的人都是自私的」呢？不過，如果明確地標示我所談及的對象，僅限於我所認識的人，再加上這些人真的都很自私，那麼我就可以理直氣壯地說：「所有的人都是自私的」。不幸的是，在日常生活的對話中，一般人在說：「所有的人都是自私的」時，很少會把說這句話的背景交代清楚。

為了避免產生困擾，當我們要讓別人了解一階邏輯語言中的量化詞的意義時，就必須先標示所談論的對象的範圍。由這些對象所形成的集合，我們稱之為論域 (domain)。

想像一下你的手上拿著三顆球，而這三顆球都是紅色的。如果你認定談論的對象，僅限於你手上的東西，並且宣稱語句：

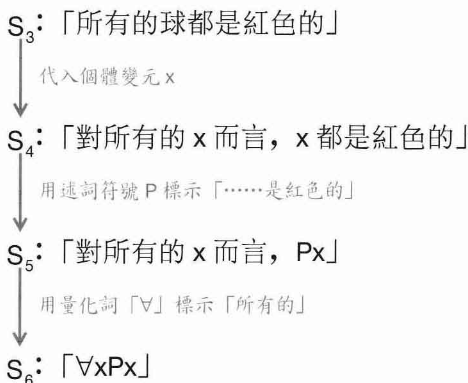
S_3：「所有的球都是紅色的」

那麼，語句 S_3 顯然為真。若以符號 (a, b, c) 分別標示這三



顆球，那麼論域可以表示成——D: {a, b, c}。

接著，用述詞符號 P 標示「……是紅色的」，那麼 Pa、Pb、Pc 分別代表什麼意義呢？Pa 表示用 a 標示的這顆球是紅色的，同樣地，Pb 表示用 b 標示的這顆球是紅色的，Pc 表示用 c 標示的這顆球是紅色的。很顯然地，Pa、Pb 和 Pc 均為真。



反過來說，利用標示論域及說明非邏輯符號的意義的方式，使得語句 S_6：「∀xPx」在這種說明情況下為真。這種說明情況就稱之為解釋 (interpretation)。換言之，通過不同的解釋，可能會使得語句 S_6：∀xPx 有不同的真假值。因此，語句 ∀xPx 出現的時候，並無法肯定其真假值，必須通過解釋，才能知道此語句的真假值。

至此，讀者應不難了解。針對非邏輯符號賦予意義，以及加上論域用以限制量化詞談論範圍，都是在作解釋的工

作。

重要的關係特性

接下來，我們要利用對關係 (relation) 的分析，來欣賞邏輯在日常生活中的趣味之處。

假設我們所談及的對象是蘇格拉底、柏拉圖和亞里斯多德三個人，而且用個體常元符號 a 代表蘇格拉底，用 b 代表柏拉圖，用 c 代表亞里斯多德，則論域所談及的對象範圍就是 D：{a, b, c}。想想語句 S_7：「蘇格拉底是柏拉圖的老師」應該怎麼表示呢？我們已經知道蘇格拉底是用符號 a 標示的，而柏拉圖是用 b 標示的，所以語句 S_7 就可以改寫成 S_7'：「a 是 b 的老師」。如果用述詞符號 P 標示「……是……的老師」這個述詞，那麼語句 S_7' 就可以寫成 Pab 的形式，而述詞 P 就稱之為二元述詞。以此類推，三元述詞的形式就是 $P^3(a_1, a_2, a_3)$，而 n 元述詞的形式則是 $P^n(a_1, a_2, ..., a_n)$ 等。此外，這些個體的排列次序非常重要，表示某個語句時，次序不可以任意排列。比如，Pab 是表示 S_7：「蘇格拉底是柏拉圖的老師」；但 Pba 則是表示 S_8：「柏拉圖是蘇格拉底的老師」。因此一旦次序排列不同，表達的意思也就跟著不同。

為了簡單起見，以下以 R 表示關係，並介紹日常中經常出現的二元述詞，其他的 n 元述詞就靠讀者自行發揮囉！



(1)關係 R 是自反的 (reflexive)。例如，等同關係就是自反的，亦即「每個東西都是它自己本身」。又如，在論域是自然數的情況下，每個數都等於自己本身，亦即 (∀x) x=x。關係 R 是指個體本身和自己本身的關係。對論域中的每個個體而言，都和自己本身擁有關係 R，則關係 R 就是自反的。

而有些關係 R 是反自反的 (irreflexive)。假設論域是所有的人，關係 R:「……比……高」，由於在所有的人中，沒有一個個體會比自己高，因此關係 R 是「反自反的」。又假設論域是自然數的情況下，關係 R:「……比……大」也是「反自反的」，因為對自然數而言，沒有哪一個自然數會比自己大。也就是說，對論域中的每個個體而言，沒有任何一個個體，和它自己本身擁有關係 R。

另外，如果在論域中，某些個體和自己本身具有關係 R，而某些個體則沒有。那麼關係 R 就是非自反的 (non-reflexive)。假設論域是「所有的人」，而關係 R:「……傷害……」就是非自反的，因為某些人會傷害自己，可是某些人卻不會。

對某個論域 D 而言，以符號 R 標示關係，上述的自反、反自反和非自反的特性可以用下列的表達式表示:

(i)關係 R 是自反的: 對論域中的所有個體而言，每個

個體都和自己本身具有關係 R，表達式為：$(\forall x)Rxx$。

(ii)關係 R 是反自反的：對論域中的所有個體而言，每個個體和自己本身都不具有關係 R，表達式為：$(\forall x)\neg Rxx$。

(iii)關係 R 是非自反的：對論域中的個體而言，有些個體和自己本身具有關係 R，而有些個體和自己本身不具有關係 R，表達式為：$(\exists x)Rxx \wedge (\exists x)\neg Rxx$。

(2)關係 R 是對稱的 (symmertic)。假設論域是「所有的人」，關係 R：「……是……的親人」。對任何一個個體 x 而言，如果 x 是另一個個體 y 的親人，那麼對 y 而言，y 也是 x 的親人。因此，關係 R：「……是……的親人」是對稱的。亦即如果 Rxy 成立，那麼 Ryx 也成立。

然而，有些關係 R 是反對稱的 (asymmertic)。假設論域是「所有的人」，關係 R：「……是……的母親」。如果 x 是 y 的母親（亦即「如果 Rxy 成立」）。那麼 y 一定不會同時是 x 的母親（亦即「那麼 Ryx 一定不成立」）。所以，關係 R：「……是……的母親」是「反對稱的」。

另外，有些關係 R 是非對稱的 (non-symmertic)。假設論域是所有的人，關係 R：「……愛……」就是非對稱的。在日常生活中，並非每一個自己所愛的人，對方都會愛自己，因此，某些個體之間的關係 R：「……愛……」會是對

稱的，然而，某些個體之間的關係 R：「……愛……」卻不是對稱的。如果了解關係的特性，看待人與人之間的關係時，就能夠比較釋懷。

(i)關係 R 是對稱的：當對論域 D 中的任兩個不同個體 x 和 y 而言，如果 Rxy 成立，那麼 Ryx 也同時成立。其表達式為：$(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Ryx)$。

(ii)關係 R 是反對稱的：當對論域 D 的任兩個不同個體 x 和 y 而言，如果 Rxy 成立，那麼 Ryx 一定不成立。其表達式為：$(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$。

(iii)關係 R 是非對稱的：當對論域 D 中的任兩個不同個體 x 和 y 而言，有些個體之間的對稱關係成立，有些對稱關係不成立。其表達式為：$((\exists x)(\exists y)(Rxy \wedge Ryx)) \wedge ((\exists x)(\exists y)(Rxy \wedge \neg Ryx))$。

(3)關係 R 是傳遞的 (transitive)。設想論域 D 是自然數，關係 R：「…… > ……」就是傳遞的，關係 R 其實就是數學中的遞移律。而假設論域 D 是所有的人，那麼關係 R：「……比……高」也是傳遞的，如果 x 比 y 高（亦即 Rxy 成立）而且 y 比 z 高（亦即 Ryz 成立），那麼 x 肯定比 z 高（亦即 Rxz 也會成立）。當關係 R 是傳遞的，意思就是在論域 D 中，如果 x 和 y 具有關係 R（亦即 Rxy 成立）而且 y 和 z 具有關係

R（亦即 Ryz 成立），那麼 x 和 z 具有關係 R（亦即 Rxz 也會成立）。

當然，有些關係 R 是反傳遞的 (intransitive)。設想論域 D 是所有的人，關係 R：「……是……的父親」就是反傳遞的。想想看，如果 x 是 y 的父親，而且 y 是 z 的父親，那麼 x 不會是 z 的父親，而是他的爺爺。這樣想想，若關係 R 是反傳遞的也不難理解。

另外，有些關係 R 是非傳遞的 (non-transitive)。假設論域 D 是所有的人，關係 R：「……是……的朋友」就是非傳遞的。因為在 x 是 y 的朋友，而且 y 是 z 的朋友的情況下，有時候 x 是 z 的朋友，有時候卻不是。因此，關係 R：「……是……的朋友」就是非傳遞的。

(i)關係 R 是傳遞的，就是對論域 D 中的任意三個個體 x, y, z 而言，在 Rxy 和 Ryz 同時成立的情況下，Rxz 也同時會成立。其表達式為：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$。

(ii)關係 R 是反傳遞的，就是對論域 D 中的任意三個個體 x, y, z 而言，在 Rxy 和 Ryz 同時成立的情況下，Rxz 一定不成立。其表達式為：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz)$。

(iii)關係 R 是非傳遞的，就是對論域 D 中的任意三個個

體 x, y, z 而言，在 Rxy 和 Ryz 同時成立的情況下，有些情況下 Rxz 成立，而有些情況下 Rxz 不成立。其表達式可以寫成：$((\exists x)(\exists y)(\exists z)((Rxy \wedge Ryz) \wedge Rxz)) \wedge ((\exists x)(\exists y)(\exists z)$
$((Rxy \wedge Ryz) \wedge \neg Rxz))$。

上述對二元述詞的分析有什麼用處呢?

(a)可用來定義關係 R 是等值的 (equivalent)。所謂關係 R 是等值的可以定義為：如果某個關係 R 是自反的、對稱的而且是傳遞的，那麼關係 R 就是「等值的」。

(b)除了用來定義其他的關係特性之外，對各個學科的學習也相當重要。除了在數學上的遞移律之外，還有正比、反比等等關係都可以藉由此一分析，使得我們更了解這些關係的特性。

(c)而在生活上的應用更是不可勝數，每個人都是社會上生活的一份子，也都和其他人建立了許多關係。當我們想要清楚地解釋這些關係時，最好的方法不就是透過關係所具有的特性來解釋嗎?

語意蘊涵關係和有效性

研究有效性 (validity) 是邏輯的主要目標。從論證的結

構來看，一個論證既然是由前提和結論組合而成，那麼如何說明前提和結論的關係，進而宣稱此論證是有效論證，還是無效論證，是相當重要的！事實上，我們可以從兩種不同觀點來說明有效性：

⑴語意學 (semantics) 觀點：語意學上的有效性，就是當前提皆真時，結論不可能為假。在沒有前提的情況下，若結論在任何可能情況下均為真，我們將這個結論稱為套套句。

⑵語法學 (syntax) 觀點：語法學上的有效性，就是結論可以從前提結合公理，經由推論規則推導出來。在沒有前提的情況下，僅由公理和推論規則可以推導出來的，稱為定理。

我們曾經引進蘊涵關係來說明有效性（參照第二章）。既然有效性可分二方面來看，所以，蘊涵關係也就分成上述兩種觀點——⑴語意上的蘊涵關係；⑵語法上的蘊涵關係。

所謂語意上的蘊涵關係，是指用語句真假值的方式，說明什麼是有效性。例如在真值表法中，利用語句的真假值建構所有可能的情況，然後再逐一檢查，是否有前提皆真而結論為假的可能情況出現。換言之，在某個論證中，前提語意上蘊涵 (semantically entail) 結論，意思就是不可能有前提皆真而結論為假的情況出現。換言之，論證的有效與否，可



以用蘊涵關係是否成立來理解。如果前提蘊涵結論，則該論證就是有效論證。

而語法上的蘊涵關係，就是指語句之間能否用適當的推論規則推導而得。例如在公理系統中，如果由前提加上公理，而經由適當的推論規則可以得到結論。那麼就可以宣稱前提語法上蘊涵 (syntactically entail) 結論。換言之，設計各種邏輯演算系統就是語法學上的工作。例如公理系統、真值樹系統、自然演繹系統等等（此處將先處理一階邏輯中的語意上的蘊涵關係，至於一階邏輯中的語法上的蘊涵關係，將在第八章再詳細說明）。

⑴語句邏輯的語意上的蘊涵關係

在語句邏輯中，所謂語句的語意，便是賦予命題符號真假值，再把語句連接詞當作真值函項來處理，就完成了說明語句的語意的工作。換言之，在語句邏輯中，因為是以語句為單位加以處理，所以，所出現的語意值 (semantic value) 只有真假值而已。

⑵一階邏輯的語意上的蘊涵關係

一階邏輯中的語意學比語句邏輯要複雜許多。主要是因為增加了許多符號，而這些符號的語意都是必須說明清

楚的。而且，在一階邏輯中的語意值不僅僅只有真假值而已。舉例來說，個體常元用來代表的「這個特定的個體」，就是個體常元的語意值。

接下來，我們介紹語意值的標示方法：某個符號 σ 的語意值，記為 $|\sigma|$。這裡出現的符號 σ，可以是個體常元、述詞符號或者是語句。

a. 先考慮 σ 是個體常元的情況。如果 σ 是個體常元，$|\sigma|$ 就是在論域 D 中 σ 所指涉的個體。就像「蘇格拉底」(σ) 是蘇格拉底這個人 ($|\sigma|$) 的名字一樣。σ 只是一個符號，而 $|\sigma|$ 才是指在論域中的那個個體。這個個體 $|\sigma|$，是論域 *D* 的某個元素，記成：$|\sigma| \in D$。

b. 接下來考慮述詞符號的情況。$P^n(a_1, ..., a_n)$ 是一階邏輯中的原子語句，P^n 代表一個 n 元述詞 (n-place predicate)。所謂的 n 元述詞是指有 n 個個體出現在這個述詞的描述中。舉例來說，述詞 P：……介於……和……之間是一個三元述詞，因為要使述詞 P 成為完整的語句，必須在三個空白位置上各填入代表一個個體的符號。根據語句的形構規則，這個完整的語句可以寫成 $P^3(a_1, a_2, a_3)$。毫無疑問地，如果語句 $P^3(a_1, a_2, a_3)$ 的「語意值」為真，意思就是依序將 a_1, a_2, a_3 填入空白位置，會滿足述詞 P，就可以記為 $|P^3(a_1, a_2, a_3)|=T$。所以，$|P^n(a_1, ..., a_n)|=T$ 的意思是：將 $a_1, ..., a_n$ 的 n 個個體依序填入述詞的空白位置，會滿足述詞 P^n。



c. 在一階邏輯語言中，由語句連接詞所連接而成的複合語句，其語意值的表示方式如下：

(i)	$\|\neg\varphi\|=T$	若且唯若 (if and only if)	$\|\varphi\|=F$
(ii)	$\|\varphi\wedge\psi\|=T$	若且唯若	$\|\varphi\|=T$ 而且 $\|\psi\|=T$
(iii)	$\|\varphi\vee\psi\|=T$	若且唯若	$\|\varphi\|=T$ 或者 $\|\psi\|=T$
(iv)	$\|\varphi\rightarrow\psi\|=T$	若且唯若	$\|\varphi\|=F$ 或者 $\|\psi\|=T$
(v)	$\|\varphi\leftrightarrow\psi\|=T$	若且唯若	$\|\varphi\|=\|\psi\|$

其實，由於一階邏輯中出現的語句連接詞，和語句邏輯中的語句連接詞完全一樣，因此，語句連接詞的語意值並無二致。(i)的意思是當 $\neg\varphi$ 為真 (T)，亦即 φ 為假 (F)，反之，當 φ 為假 (F) 時，$\neg\varphi$ 為真 (T)。(ii)的意思則是當 $(\varphi\wedge\psi)$ 為真時，φ 為真而且 ψ 為真，反之亦然。(iii)的意思則是當 $(\varphi\vee\psi)$ 為真時，φ 為真或 ψ 為真，而 φ 或 ψ 其中只要有一個為真，則 $(\varphi\vee\psi)$ 為真。(iv)則是表示 $(\varphi\rightarrow\psi)$ 為真的情況，是在 φ 為假或 ψ 為真時。(v)的意思則是當 φ 和 ψ 的真假值相同時，$(\varphi\leftrightarrow\psi)$ 為真，反之亦然。(可參照第二章比較「語句連接詞」的意義，此處出現的表示方法，其實只是另一種表示語意值的方法而已。)

d. 最後，考慮語句中的量化詞。一階邏輯的設計，我們要考慮所有的 (∀) 和有些 (∃) 兩個量化詞。對某個論域 D 來說，量化詞的語意就是指，將語句中出現的個體變元

$(\varphi(x))$，以論域中的個體常元 $(\varphi(a))$ 替代，進而變成不含量化詞的語句。舉例來說，假設論域 D 是 {a, b, c}，語句 S_1: $\forall x\ \varphi(x)$。當量化詞 $\forall$ 出現時，就是指在論域 D 中的 a 或 b 或 c，每一個都可以替代 x 的位置。語句 S_1 就可以改寫為語句 S_1': $\varphi(a)\wedge\varphi(b)\wedge\varphi(c)$。再則，假設論域 D 仍然是 {a, b, c}，語句 S_2: $\exists x\ \varphi(x)$。當量化詞 $\exists$ 出現時，就是指在論域 D 中的 a 或 b 或 c，其中至少一個可以替代 x 的位置。語句 S_2 就可以改寫為語句 S_2': $\varphi(a)\vee\varphi(b)\vee\varphi(c)$。因此，包含量化詞的語句的真假值，可以用下列式子表達：

(i) $\lvert\exists x\varphi(x)\rvert$=T	若且唯若	在論域中某些個體可以替代變元在語句中的位置，意即 $\lvert\varphi(a)\rvert$=T。
(ii) $\lvert\forall x\varphi(x)\rvert$=T	若且唯若	在論域中所有個體都可以替代變元在語句中的位置，使得 $\lvert\varphi(a)\rvert$=T。

由於在一階邏輯中，出現了許多語句邏輯中未出現的符號。因此，必須針對這些符號給予適當的語意說明。為什麼要說明這些符號的語意呢？其實解釋這些符號的目的，最後當然是希望用來決定整個語句的真假值，一旦我們知道論證中每一個語句的真假值，那麼就可以據以決定該論證



有效與否！所以，如果要讓自己思考更細密、更有條理的話，就必須花點心思弄清楚自己平常是如何賦予這些符號意義的。

本章小結

本章的用意是讓各位讀者了解，學習越多越能處理複雜的問題。既然邏輯的目的是處理我們日常說話的問題，那麼我們當然希望它能做得越完善越好。所以透過擴充語句邏輯的方式，可以讓我們更清楚日常說話時，語句之間的關聯是什麼。由於進入一階邏輯之後，符號的數量變得多些，符號的意義也相形複雜許多，不過作者相信有耐心的讀者，一定可以從中得到增強思考能力的效果喔！接下來，讓我們重溫一下重要概念囉！

◆一階邏輯：量化詞規範的範圍僅限於對象的邏輯。

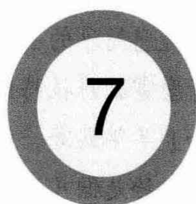
◆論域：用來標示討論對象的範圍。

◆解釋：給予使用符號意義的程序，稱為解釋。

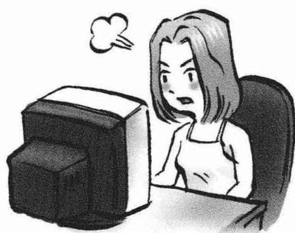
◆語意的蘊涵關係：前提蘊涵結論，意謂不可能出現前提皆真而且論為假的情況。

◆語法的蘊涵關係：前提蘊涵結論，意謂在前提成立的條件下，結論必定成立。

◆等值關係：關係 R 稱為等值關係，意謂 R 是自反、對稱且傳遞的。

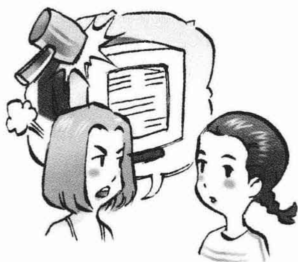


日常語言的翻譯



「厚！真是受不了這些笨軟體。等到它們都學會了，我大概都已經作古了。這麼簡單的事情都作不來，還什麼電腦科技時代呢！ㄘㄟˊ……」芊芊對著一旁的小鈴抱怨著。小鈴是個凡事不太愛計較的可愛型女孩，芊芊則剛好相反，只要見到不順眼的事，一定會碎碎唸，說三道四的。也許是互補的關係吧！一個喜歡挑三揀四的人，剛好遇上個可以傾聽的人，兩人的感情就在這一說一聽中，日益深厚。面對芊芊發出的不平之鳴，小鈴總是以天真的可愛笑容回應著。正因如此，芊芊對小鈴還真是無可奈何，總說她是濫好人一個。聽著芊芊又開始發飆，小鈴還是報以微笑地說：「芊芊大人！又有哪一個不長眼睛的笨傢伙，惹得我們家大姑娘生氣了？」

芊芊沒好氣地說：「還不是新買的中文手寫軟體，真是笨得可以，妳知道嗎？我寫來寫去，它就是會搞錯。難道它笨到連一點點兒區別都搞不清楚嗎？真是的。」小鈴聽著芊芊的牢騷，肚裡暗暗覺得好笑：「芊芊，妳生氣的範圍也太寬了吧！跟機器也可以生氣嗎？它又不知道妳正在生氣，這可不是白費力氣嗎？」芊芊當然知道，電腦這





玩意兒不會對她生氣有任何反應，只是她已經習慣瑣瑣碎碎地叨唸著她看不過去的事情。「小鈴，不是我愛發牢騷。妳瞧瞧人類發明的電腦這玩意兒，大夥兒現在都得靠它過日子，如果我說不會電腦的人相當於現代文盲，大概也沒人會反對。只是號稱現代最重要的科技文明的東西，怎麼連我們覺得再簡單不過的東西，都得花費這麼大的心力訓練它。妳說，這不是很可笑嗎?」

「電腦就是這麼一回事啊! 電腦的世界和人腦的世界又不一樣，不能夠相提並論啊。妳看，有很多電腦做起來輕而易舉的事，對人腦來說卻做不到呢，所以我覺得應該是說，人腦和電腦各有長處才對吧!」小鈴試圖替電腦找點辯解的理由。「我當然知道，就拿電腦可以儲存檔案來說吧。只要妳把檔案儲存在電腦裡，隨時可以把這些檔案叫出來，而且是一模一樣的重現，光是這點人腦就辦不到。可是，我還是覺得這麼發達的電腦，對於這麼簡單的輸入，還得大費周章地教它辨認這回事，覺得很難理解。為什麼這些軟體設計者，不能將這些軟體弄得聰明一點再上市呢?」芊芊還是用她對凡事獨特的眼光批評著。

雖然小鈴覺得芊芊的想法有點兒可笑，但又覺得芊芊所說的，也並不是全無道理。雖然想扯點兒別的事，可是思緒仍然停在芊芊所說的問題上。小鈴心裡想著：「其實芊芊雖然跟電腦生氣很好笑，可是的確就像芊芊說的，為什麼電腦在某些方面，看起來大大地超越人類的能力，可是有些方

面又讓人覺得笨到不可思議呢?」其實在小鈴的心中對這個問題也是難以索解。

小鈴想起當初幫她組裝電腦的宸豪，宸豪是小鈴大哥的同學，看他組裝電腦的過程，只能以天縱英明來形容。小鈴直覺上認為，宸豪一定可以幫她們解決這個問題。於是對芊芊說：「妳剛剛說的問題，讓我產生了點兒興趣。雖然我沒法兒給妳答案，不過有一個電腦高手可以請教喔。有沒有興趣啊!」其實芊芊不太在意，只是發發牢騷罷了。於是搖了搖頭，跟小鈴說：「啊! 沒那麼嚴重啦，反正電腦在這方面笨就笨，我不會跟它計較的。」小鈴卻越想越覺得這個問題很有趣，好奇心驅使著小鈴，說什麼都要把這個問題給解決。於是，小鈴使出渾身解數，勸芊芊和她一起去請教電腦高手。拗不過小鈴的請求，芊芊只好勉強答應小鈴，一起找電腦高手問個明白。小鈴見芊芊好不容易答應了，就趕緊打手機給宸豪，宸豪接到小鈴的電話，顯然有點兒驚訝。小鈴只跟宸豪說，有些關於電腦的問題想當面請教他，宸豪也表示樂於協助。



過了好一會兒，小鈴家的門鈴叮咚叮咚地響起。小鈴趕緊下樓去開門，見到宸豪手裡拿著厚厚的電腦書，有點兒靦腆地對著宸豪說：「宸豪哥，謝謝你專程過來一趟。請進!」



宸豪走進了小鈴的家，就衝著樓上走去，邊走還邊唸著：「小鈴，妳的電腦哪裡有問題？我來幫妳搞定它。」小鈴急忙拉住宸豪說：「宸豪哥，不是我的電腦有問題啦！是有些關於電腦的問題想請教你，所以才麻煩你跑一趟。」這時候，原先在小鈴書房裡的芊芊剛好也走下樓來，就和宸豪這麼一上一下地卡在樓梯間。見到素未謀面的宸豪，芊芊心想這一定就是小鈴說的電腦高手吧！於是舉起手來跟宸豪揮了揮，「嗨！你就是小鈴說的電腦高手吧。我剛剛可是聽小鈴對你推崇備至喔。久仰久仰！」宸豪第一次見到芊芊，不曉得為什麼突然手足無措。紅著臉說：「妳好！」為了解決尷尬的表情，趕緊轉頭對著小鈴說道：「妳說不是電腦有問題，又說妳找我來是關於電腦的問題，這到底是怎麼回事啊？」看著宸豪滿臉通紅的樣子，小鈴肚裡暗笑著說道：「宸豪哥，我們一起到客廳的沙發坐著，讓我和芊芊把問題說清楚。不然你跟芊芊在樓梯上像黑羊白羊一樣，很好笑喔。」宸豪趕緊對芊芊和小鈴說道：「是是是，我站在樓梯上實在很好笑，走吧！」

下樓來的芊芊低聲地對著小鈴說：「妳去倒點兒果汁來吧，這是妳家可不是我家，不要怠慢了客人。」其實宸豪是小鈴哥哥的同學，和小鈴哥哥的交情好得不得了。小鈴見到兩人尷尬的模樣，開始覺得有點兒好笑。「是，芊芊大人！小的我這就去準備果汁，宸豪哥哥就交給妳了」，小鈴開玩笑地說。芊芊挺不服氣的，平常都是她話多，怎麼小鈴今天

和她好像交換了角色一樣。

小鈴把果汁放在沙發前茶几上，就對著宸豪說道：「宸豪哥，請用果汁。讓你跑這麼一趟，真是不好意思。其實是這樣的，我和芊芊剛剛在打電腦的時候，突然芊芊邊打邊批評電腦很笨。可是，我卻覺得電腦在某些方面很聰明，某些方面真的很笨。所以想請教你這個電腦高手，為什麼會這樣呢?」宸豪接過了小鈴遞來的果汁說道：「謝謝，可是妳說的問題我不太懂。什麼電腦很笨又很聰明的?」芊芊見狀搶著說：「是這樣的，我在使用中文手寫軟體的時候，發現電腦實在笨得可以，一個字的筆劃稍微不一樣，電腦就分不出來了，所以我就跟小鈴說電腦很笨。可是小鈴說，電腦比人腦優秀的地方很多，所以只能說電腦有時候笨，有時候聰明啊。我都說她對了，可是她硬要找你來解釋清楚怎麼一回事。」

宸豪聽完芊芊說的話，啜了口果汁：「嗯！我知道妳們在說什麼了。沒關係，很多人搞不清楚這個問題，我講個笑話給妳們聽。妳們可知道如果要將磁片格式化該怎麼作呢?」芊芊搶著說：「我知道，就把磁片放入 A 槽，然後進入 DOS 系統視窗，打上 format a:，再按 Enter 就行了。」「沒錯，可是有人搞不清楚，聽說有人拿著磁片放入 A 槽之後，對著電腦喊：『格式化，將磁片格式化。』好像乩童做法一樣，妳們說好不好笑。還有些人好一點兒，是在視窗上打上中文的格式化，結果怎麼著，當然還是不被接受囉。妳們瞧出問



題的關鍵了嗎?」

宸豪邊說著，小鈴和芊芊捧著肚子狂笑。芊芊還按著肚子說道：「怎麼會有這麼笨的人啊！如果電腦聽得懂人說的話，那就是人而不是電腦了。還格式化嘞，太好笑了吧！」宸豪微笑著說道：「沒錯，這正是問題所在。人腦和電腦的區別並不在於誰比較聰明或者誰比較笨，而是兩者的語言不同，在電腦的世界裡，妳必須輸入電腦的語言，電腦才能反應，否則的話，電腦根本不動如山。所以囉，如果要電腦反應的話，就必須把我們的語言，翻譯成相對應的電腦語法，電腦才會動哩！」



芊芊覺得宸豪說的很有道理，而這番道理其實也淺顯易懂，可是自己以前從來沒有想過就是了。小鈴見到芊芊得到滿意解答的神情，就對著芊芊說：「我沒介紹錯吧！宸豪哥哥可是電腦高手呢。」芊芊瞇起眼睛對小鈴說：「我贊成，宸豪哥的確不容易，三言兩語就把我們的問題解決了。原來電腦語法就是電腦的語言，而我們的語言還得想辦法跟電腦語言對上，否則的話電腦就不懂我們在說什麼。」宸豪覺得這兩個小女生會對這種問題感興趣，心裡也覺得挺有趣的，於是將他所知道的電腦的歷史，跟這兩個小女生來個簡介。小鈴和芊芊聽著聽著也覺得實在有趣極了。也才明白原來在視窗系統出現之前，有一堆電腦語

言要學。

由於從小開始學習母語，在接觸到其他語言之前，每個人都會覺得，在溝通的過程中，能夠了解彼此所說的話是理所當然的。直到接觸到其他語言的時候，才會驚覺學習語言並不是件容易的事。不過，對於學習其他語言的目的，大家倒是沒有太多歧見，因為溝通所需，所以需要彼此學習。然而，從某個語言到另一個語言之間，溝通是如何可能的呢？

為了溝通上的需求，人們著手建立了翻譯系統。從字彙、語句、文法分析、發音等，讓有意學習另一個語言的人，可以從自己的母語，用對應的方式來理解另一個語言。不幸的是，翻譯經常會有辭不達意的現象出現，當然人們也盡力研究消弭這類的問題。

這個問題不僅僅出現在日常語言中，也出現在各種人工語言。在故事中的主角芊芊和小鈴，正是陷入這樣的困境中，當她們對電腦提出聰明或笨的評價的時候，完全忽略了電腦語言與人類語言的差異。想想看，如果有一個外國人聽不懂中文，而你對他說了半天中文，他完全木然以對，難道你會說他笨嗎？當然不會，你只是知道他是因為聽不懂，所以不知如何反應而已。如果要讓他知道如何反應，最好的方法當然是建立一套好的翻



譯系統，可以將中文對應到他的語言，那麼他就可以了解你在說什麼了。

同樣地，邏輯作為一種人工語言，也需要建立這樣的翻譯系統。建立這個翻譯系統的目的，在於讓我們能夠方便檢驗自己所說的論證，是不是一個有效論證。不過，翻譯系統不見得是完美無缺的，也許不同的人，對某句話應該如何翻譯，會有不同的意見。然而，翻譯顯然也不是任意的，有些語詞或句子並不能任意解釋，否則就失去了翻譯的意義。因此研究日常語言和邏輯語言之間的翻譯關係，是不可忽視的重要關鍵。

日常語言和邏輯語言的對應關係

到目前為止，我們學到了語句邏輯的語言（第三章）和一階邏輯的語言（第六章）。很顯然的，這兩種語言和日常語言不一樣。那麼，為什麼要學習邏輯語言呢?

其實說穿了，邏輯語言只是人類設計用來克服困難的工具。因為從日常語言的符號排列，無法直接檢驗哪些論證是有效論證，所以需要藉由邏輯來檢驗。在使用日常語言溝通的時候，要認定彼此之間說的話有沒有道理，似乎只能訴諸直覺。可是，光憑直覺認定的結果，一定會產生許多強詞

奪理的情況，相信很多人對這種現象難以接受，可是又不知如何反駁才好；邏輯正好是設計用以解決這種窘境的工具。當你遇到強詞奪理的情況，你應該如何告訴對方，他所說的話是沒有道理的呢？其實很簡單，只要你能夠把他所說的話，翻譯成邏輯語言，再利用邏輯系統加以處理，就可以理直氣壯地告訴對方，他說的話為什麼沒有道理。因此，除了直覺之外，人們必須要找到更好的方法，用來檢驗說話的道理在哪裡。而邏輯正是用來解決困難的最佳工具。

人類之所以能夠號稱進入文明時代，正因為人類能夠提出許多理論，用來解決生活上的問題。但是，由於專家的熱情投入，許多學科的發展，已經到了難以一窺堂奧的地步。甚至，有許多是令人望而生畏的。不過，即使如此，培養基本能力卻是不可或缺的，因為基本能力是生活的必需品。以數學來說，現代人有誰不需要具備數學上的基本能力呢？因為如果不具備數學的基本能力，在生活上鐵定是寸步難行。想想看，如果連相等 (equal) 的概念都沒有，那麼買東西、賣東西，甚至想要以物易物都不可能。

不過，雖然每個人知道必須具備數學的基本能力。但是，還是有不少人認為，只要會加減乘除就夠了，何必再去學數學的專業語言呢？這不是太累了嗎？然而，數學之所以會蓬勃發展自有其道理。有許多人為了增加自己生活的能力，想盡辦法提升自己的數學能力。想想看，如果你是老闆，當你要僱用會計職員的時候，是否會考慮錄用數學能力比



較好的呢？求職者為了獲得青睞，是否會考慮加強自己的數學能力呢？ 答案想必是肯定的。

邏輯當然也是生活必備的基本能力之一。然而，有些人也許會認為，只要會說話，然後憑直覺判定有沒有道理就可以了，何必再花費時間學習邏輯呢？可是，如果你經常需要說服別人，或者在會議中發表自己的看法。相較於只憑直覺發表的理由，用合乎推論規則的論證，是否比較能夠說服別人呢？ 關於這點，我想也是毋庸置疑的。因此，如何把日常語言翻譯成邏輯語言，進而利用邏輯規則檢驗整個論證是否為有效論證，是非常重要的練習。

雖然將日常語言轉譯為邏輯語言，會有一些意想不到的問題。不過，基本的語詞翻譯爭議並不大。一開始著手翻譯的時候，應該先把日常生活語詞的使用意義，和邏輯語言中相對應的符號意義結合起來。如此一來，就可以完成基本的翻譯了！

1. 非 (not)：$\neg$
2. 而且 (and)：$\wedge$
3. 或者 (or)：$\vee$
4. 如果……則…… (if..., then...)：$\rightarrow$
5. 若且唯若 (if and only if)：$\leftrightarrow$

然而日常語言的使用非常複雜，有時候必須仔細想想，才能比較正確地轉譯。設想語句 S_1：「雖然今天天氣不好，我還是要去工作。」在語句 S_1 中出現的「雖然……，還是……」應該怎麼翻譯呢？其實，語句 S_1 的意思就是：「今天天氣不好『而且』我要去工作」。在有限的篇幅中，本書當然無法窮舉日常語

言中的所有語詞，因此，僅列出一些常用的語詞加以討論，希望能作為讀者思考其他語詞的依據。

(1) 既不是……，也不是…… (neither..., nor...)

S_2：「打破花瓶的人，既不是我，也不是他」



S_2：「我沒有打破花瓶而且他沒有打破花瓶」


用語句連接詞代入

S_2：「(¬ 我打破花瓶) ∧ (¬ 他打破花瓶)」


p：我打破花瓶，q：他打破花瓶

S_2' : $(\neg p \wedge \neg q)$（語句邏輯語言）

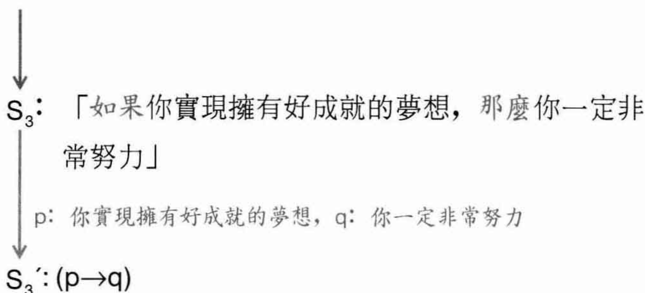

a：我，b：他，Px：x 打破花瓶

S_2'' : $(\neg Pa \wedge \neg Pb)$（一階邏輯語言）

(2) 只有 (only if)

S_3：「擁有好成就的夢想，只有在非常努力的情況下才會實現」





(3) 除非 (unless)

S_4：「除非地球毀滅，我對你的愛永恆不渝。」

S_4：「如果我對你的愛不是永恆不渝，那麼一定是地球毀滅了。」 ＝ S_4：「如果地球不毀滅，那麼我對你的愛永恆不渝。」 ＝ S_4：「地球毀滅或者我對你的愛永恆不渝。」

p：我對你的愛永恆不渝，
q：地球毀滅

S_4': $(\neg p \to q)$

S_4''': $(p \vee q)$

＝ S_4'': $(\neg q \to p)$ ＝

有趣的是，這三種翻譯方式所得到的邏輯語句 (S_4'、S_4''、S_4''')，彼此之間是等值的。根據等值語句的意思，就是在任何可能情況下，語句的真假值均相同。因此，不妨將 S_4'、S_4''、S_4''' 看成都可以適當地傳達 S_4 的意思。也就是說，在語言應用上，S_4、S_4'、S_4''、S_4''' 都是一樣的意思。

量化詞的翻譯

在日常生活中，我們經常會用到量化詞。例如，所有的人都很自私、有些人是含著金湯匙出生的、沒有人喜歡被背叛的感覺、不是所有的人都愛錢等等。

為了簡單起見，就利用曾經提過的 A、E、I、O 四種句型（參照第五章），說明如何將含有量化詞的日常語言，轉譯成邏輯語言的語句。

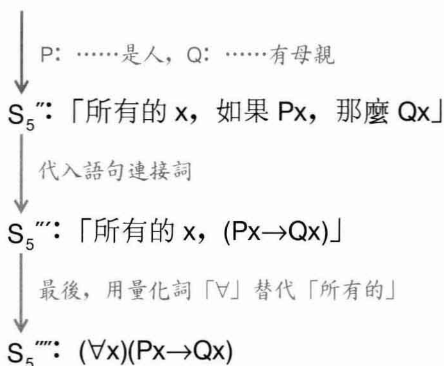
(1)全稱語句（出現全稱量化詞的語句）的翻譯，以 A 語句為例

S_5：「所有的人都有母親」

↓ 用個體變元 x 代表論域 D 中的某個個體（非明確特定的個體）。語句 S_5 就可以改寫成語句 S_5'

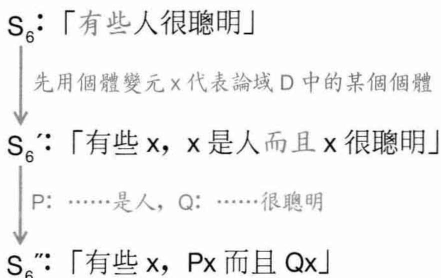
S_5'：「所有的 x，如果 x 是人，那麼 x 有母親」



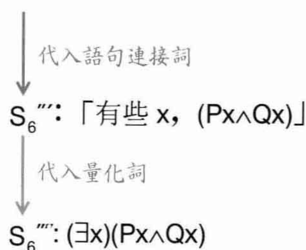


在日常語言中，凡是「所有的 P 都是 Q」這種句型，都可以看成 A 語句。換言之，凡是符合 A 語句類型的語句，都可以翻譯成：$(\forall x)(Px \rightarrow Qx)$。

⑵存在語句（出現存在量化詞的語句）的翻譯，以 I 語句為例







而在日常語言中，凡是「有些 P 是 Q」這類的語句，都可以看成 I 語句。也就是說，凡是符合 I 語句類型的語句，都可以翻譯成：$(\exists x)(Px \wedge Qx)$。

A、E、I、O 四種句型的翻譯方式如下：

全稱肯定句型	所有的 P 都是 Q。	轉譯為	$(\forall x)(Px \rightarrow Qx)$
全稱否定句型	沒有任何一個 P 是 Q。	轉譯為	$(\forall x)(Px \rightarrow \neg Qx)$
存在肯定句型	有些 P 是 Q。	轉譯為	$(\exists x)(Px \wedge Qx)$
存在否定句型	有些 P 不是 Q。	轉譯為	$(\exists x)(Px \wedge \neg Qx)$

在日常語言中，還有幾個經常用到和量化詞有關的語詞：至少 (at least)、最多 (at most)、恰有 (exactly) 和只有 (only)。這些語詞應該如何翻譯呢?

⑴至少。「至少有一個……」這類的語句非常簡單，語句 S_7：「至少有一個學生」，可以翻譯成語句 S_7': $(\exists x)Px$，Px 就代表「x 是學生」。但是，語句 S_8：「至少有兩個學生」，就不是那麼容易了。語句 S_8 不能翻譯成語句 S_9: $(\exists x)(\exists y)(Px \wedge Py)$。為什麼呢? 因為邏輯語句 S_9，翻譯成日常語

句是語句 S_9'：「存在一個個體 x，x 是學生；存在一個個體 y，y 是學生」。語句 S_8 和語句 S_9' 有什麼不同呢？這兩個語句的差異在於，語句 S_8 的內容是說，至少有不同的兩個人，而這兩個人都是學生。但是，語句 S_9' 的內容卻沒有強調 x 和 y 必須是不同的兩個人，也就是說如果在語句 S_9' 中的 x 和 y 是同一個個體 (x=y)，那麼就不符合「至少有兩個……」的要求。

所以，語句 S_8 應該翻譯成語句 S_8': $(\exists x)(\exists y)((Px \wedge Py) \wedge \neg(x=y))$。或者，可以引進新的符號「≠」用來表示「不是等同的」，那麼語句 S_8 就可以翻譯成語句 S_8'': $(\exists x)(\exists y)((Px \wedge Py) \wedge (x \neq y))$。因此，如果要表示「至少有三個學生」，就必須寫成 $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(((Px \wedge Py) \wedge Pz) \wedge (((x \neq y) \wedge (y \neq z)) \wedge (z \neq x)))$。只要用相同的處理方式，就可以翻譯「至少有四個……」、「至少有五個……」等等。

⑵最多。設想語句 S_{10}：「最多有一個學生」。在翻譯語句之前，先想想看最多是什麼意思？最多的意思是不會比一個多，也就是說也可能沒有。所以，語句 S_{10} 的意思是，在論域 D 中，所有符合「……是學生」這個述詞的個體，都一定是同一個個體。因此，語句 S_{10} 就翻譯成語句 S_{10}': $(\forall x)(\forall y)((Px \wedge Py) \rightarrow (x=y))$。$S_{10}'$ 的意思是，對所有是學生的個體 x，以及是學生的個體 y 而言，x 和 y 是同一的，因此，S_{10}' 表示最多只有一個學生。關於這個轉譯另外有個有趣的問題，值得和各位分享。各位可以想想看，「最多有一個

學生」是否表示「有學生存在」呢？當然不是。比如說，如果我號稱自己最多有一棟房子，那麼意思只是說，如果我有房子的話，最多只有一棟。假如我沒有房子的話，你也不能說我錯，因為我的意思只是如果有的話，那麼最多只有一棟，但是我可能沒有房子。意即從邏輯的觀點來說，最多的意思並不蘊涵存在。再設想語句 S_{11}：「最多有兩個學生」，S_{11} 應該要怎麼翻譯呢？按照相同的方式，語句 S_{11} 可以翻譯成語句 S_{11}':$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((Px\wedge Py)\wedge Pz)\rightarrow(((x=y)\vee(y=z))\vee(z=x)))$。依照同樣的方式，就可以翻譯「最多有三個……」、「最多有四個……」等等。

⑶恰有。設想語句 S_{12}：「恰有一個學生」。先想想看，恰有是什麼意思？恰有的意思是「剛剛好有一個，不多也不少，就是有一個，而且不會有兩個，也不會沒有」。換言之，就是「至少有一個『而且』最多有一個」。所以，翻譯恰有一個，就是把至少有一個和最多有一個結合起來。

因此，語句 S_{12}：「恰有一個學生」，就可以翻譯成語句 S_{12}': $(\exists x)Px\wedge((\forall x)(\forall y)((Px\wedge Py)\rightarrow(x=y)))$。而語句 S_{13}：「恰有兩個學生」，就翻譯成語句 S_{13}': $(\exists x)(\exists y)((Px\wedge Py)\wedge(x\neq y))\wedge(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((Px\wedge Py)\wedge Pz)\rightarrow(((x=y)\vee(y=z))\vee(z=x)))$。

⑷只有。設想語句 S_{14}：「只有焦虔是學生」。用個體常元 a 標示焦虔這個人，語句 S_{14} 是否可以翻譯成語句 S_{15}: Pa 呢？當然不行。因為語句 S_{15} 只顯示語句 S_{15}'：「焦虔是學生」的意思，並未顯示只有的意思。因此，必須要加上一



些限制才能表現出只有這個詞。所謂的只有的意思是——在論域 D 中任何一個是學生身分者，就是焦虔這個人。根據這個想法，語句 S_{14}：「只有焦虔是學生」，就必須翻譯成語句 S_{14}': $(\forall x)((x=a)\leftrightarrow Px)$。

S_7：「至少有一個學生」
S_7': $(\exists x)Px$
S_8：「至少有兩個學生」
S_8': $(\exists x)(\exists y)((Px\wedge Py)\wedge\neg(x=y))$
S_8'': $(\exists x)(\exists y)((Px\wedge Py)\wedge(x\neq y))$
S：「至少有三個學生」
S': $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(((Px\wedge Py)\wedge Pz)\wedge(((x\neq y)\wedge(y\neq z))\wedge(z\neq x)))$
S_{10}：「最多有一個學生」
S_{10}': $(\forall x)(\forall y)((Px\wedge Py)\rightarrow(x=y))$
S_{11}：「最多有兩個學生」
S_{11}': $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((Px\wedge Py)\wedge Pz)\rightarrow(((x=y)\vee(y=z))\vee(z=x)))$
S_{12}：「恰有一個學生」
S_{12}': $(\exists x)Px\wedge((\forall x)(\forall y)((Px\wedge Py)\rightarrow(x=y)))$
S_{13}：「恰好有兩個學生」
S_{13}': $(\exists x)(\exists y)((Px\wedge Py)\wedge(x\neq y))\wedge(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((Px\wedge Py)\wedge Pz)\rightarrow(((x=y)\vee(y=z))\vee(z=x)))$
S_{14}：「只有焦虔是學生」
S_{14}': $(\forall x)((x=a)\leftrightarrow Px)$

羅素的確定描述詞

在上述的翻譯過程中，讀者或許會對存在預設 (existential import) 所帶來的問題感到困惑。當某個人宣稱他最多有一棟房子時，是否蘊涵他一定有房子呢？這個問題不僅容易

在日常生活中造成困擾，也是邏輯亟需面對的問題。簡單來說，我們通常討厭別人說大話或者說空話，然而，什麼是空話呢？想想看，如果有個人說：「我的財產至少有 5 億」，那表示這個人信心滿滿地認為他有 5 億的資產，殆無可疑。但是如果他說：「我的資產最多有 100 億」，如果不加上存在預設，那麼即使他身無分文，這句話仍然為真。但是如果用至少的話，那麼他說的話為真的條件就必須真的有 5 億資產。從這個比較就可以得知，處理存在預設是非常重要的。

為了簡單起見，我們可以用專名所出現的狀況來討論這個問題，並且介紹 20 世紀上半葉最受歡迎的處理方式。讓我們比較一下語句 S_{17} 和語句 S_{18}：

S_{17}：「孫悟空是《西遊記》的作者」
S_{18}：「愛因斯坦是《西遊記》的作者」

語句 S_{17} 和語句 S_{18} 的真假值顯然都是為假，不過使語句為假的理由卻不太一樣。因為「孫悟空」這個專名所指涉的個體，在現實世界中並不存在。所以，語句 S_{17} 為假的理由是：現實世界中不存在一個稱為「孫悟空」的個體，可以用來檢驗是否滿足「……是《西遊記》的作者」這個性質。然而，語句 S_{18} 中的專名「愛因斯坦」所指涉的個體，在現實世界中確實存在，而使得語句 S_{18} 為假的理由是：「愛因斯坦」這個專名所指涉的個體（就是愛因斯坦這個人），不滿足「……是《西遊記》的作者」這個性質。使語句 S_{17} 和語句



S_{18} 為假的不同理由，在日常語言中可以說明。但是翻譯成邏輯語言的時候，就無法看出這兩者的區別。以個體常元 a 代表孫悟空，b 代表愛因斯坦，Px 表示 x 是《西遊記》的作者，S_{17} 和 S_{18} 的否定句相對應的邏輯語句分別為：

a：孫悟空

b：愛因斯坦

Px：x 是《西遊記》的作者

S_{17}': $\neg Pa$

S_{18}': $\neg Pb$

從 S_{17}' 和 S_{18}' 中，我們無法分辨 S_{17} 為假和 S_{18} 為假的理由有什麼不同。因此，我們必須想辦法解決這個問題。這個困難在羅素的手中獲得初步的解決。羅素認為，其實日常語言中的專名只是確定描述詞 (definite description) 的偽裝。如果把專名恢復成確定描述詞的表達形式，那麼上述的困難可以得到解決。什麼是確定描述詞呢？所謂確定描述詞是用某個性質去指涉某個個體，最重要的是，這個性質所指涉的是唯一而明確的個體。例如，語句 S_{19}：「現任中研院院長得過諾貝爾獎」。「現任中研院院長」的意思可以看成——在論域中有某個個體，而且這個個體符合「……是現任中研院院長」所描述的性質。可是，符合「……是現任中研院院長」這個性質的個體，顯然只有唯一的一個。所以在翻譯的時候，必須表達出唯一的一個的特點。

讓我們用羅素的例子說明如何分析確定描述詞。以語句 S_{20}:「現任法國國王是禿頭」(The present king of France is bald) 為例,語句 S_{20} 有三個重要的訊息:

(1)宣稱存在性: 至少有一個法國國王存在。
(2)宣稱單一性: 不會有多於一個法國國王的情形(最多只有一個法國國王)。
(3)個體是否滿足述詞描述的特徵,也就是此一個體是不是滿足述詞「……是禿頭」的個體所形成的集合中的一員。

這三個訊息可以分別寫成下列的日常語言(括號中的是相對應的邏輯語句):

Fx: x 是現任法國國王。
Bx: x 是禿頭。

(1′) 有一個現任法國國王。($(\exists x)Fx$)
(2′) 不會有多於一個的現任法國國王。($(\forall x)(\forall y)((Fx \wedge Fy) \rightarrow (y=x))$)
(3′) 是法國國王者就是禿頭。($(\forall x)(Fx \wedge Bx)$)

因此,要將語句 S_{20} 翻譯成邏輯語句的時候,不能直接用個體常元 a 代表現任法國國王,Bx 表示 x 是禿頭,翻譯成語句 S_{20}': Ba。因為當你認定語句 S_{20}' 為假($\neg Ba$)時,



其實會分不清楚所謂的否定，是認定沒有符合現任法國國王這個性質的個體存在，還是認定有一個現任法國國王但不是禿頭呢?

所以，要正確地將語句 S_{20} 翻譯成邏輯語句，就是把 (1′)-(3′) 的訊息結合起來，才算是正確的翻譯。而 (1′)-(3′) 的邏輯語句結合起來就會變成語句 S_{21}：

$$S_{21}: ((\exists x)Fx)\wedge((\forall x)(\forall y)((Fx\wedge Fy)\rightarrow(y=x)))\wedge((\forall x)(Fx\wedge Bx))$$

而語句 S_{21} 可以進一步簡化成語句 S_{21}'：

$$S_{21}': (\exists x)(Fx\wedge(\forall y)(Fy\rightarrow(y=x))\wedge Bx)$$

S_{21}' 的意思就是存在某個個體 x 是法國國王，而且對任何個體 y 而言，如果 y 是法國國王，則 y 和 x 是同一個個體，而且 x 是禿頭。

羅素認為，如果將日常語言中的語句，以正確的邏輯語句表達，就可以避免上述的困難。以語句 S_{21} 來說，它是由 (1′)-(3′) 三個語句，利用 ∧ 結合而成的。因此，如果 (1′)-(3′) 中有任何一個為假，那麼語句 S_{21} 就為假。

為了清楚起見，先將認定語句 S_{20} 為假的兩種否定的情況分開：

S_{22}：「不存在所謂的現任法國國王是個禿頭」

S_{23}：「有一個符合現任法國國王這個性質的個體，而且這

個個體不是禿頭」

兩者的不同，在於加上否定符號的位置不同。因此，它們翻譯成的邏輯語句分別為：

S_{22}': $\neg(\exists x)(Fx \wedge (\forall y)(Fy \rightarrow (y=x)) \wedge Bx)$

S_{23}': $(\exists x)(Fx \wedge (\forall y)(Fy \rightarrow (y=x)) \wedge \neg Bx)$

羅素認為，經由語句 S_{22}' 和語句 S_{23}' 的表達方式，可以解決日常語言中專名的指涉問題。換言之，只要將專名的偽裝外衣去除，以確定描述詞的方式進行分析，就可以避免日常語言中，專名所指涉的個體是否存在的問題。

其實日常語言是一種非常模糊的說法，許多各學科的專業術語，都會被日常語言所吸納，例如數學中的自然數，經濟學中的價值等等。而在本章中，作者試圖挑選一些經常在邏輯中被討論的日常語言，讓讀者們欣賞一下如何在這兩個語言中作轉譯的工作。時至今日，已經有許多電腦的專業術語被人們應用在日常生活中，而邏輯這個詞也常被人們掛在嘴邊，相信要求精確性越來越高的今日，更精確地轉譯日常語言的需求將越來越高，而這也正是邏輯學家們積極努力的目標。



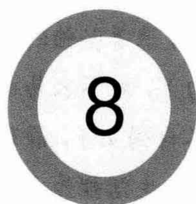
本章小結

將日常語言翻譯成邏輯語言，可幫助我們更清楚自己在思考上所遭遇的困難。事實上，這項翻譯工作並不輕鬆，因為每個人對日常語言中各種語詞的用法不盡相同。不過，在本章中，我試圖對一些在其他邏輯書上經常出現，而且較無爭議的翻譯提出說明。相信這些說明可以幫助那些對邏輯有興趣，但缺乏引導的人。當然，由於日常語言相當繁瑣，我也不可能在書中解答所有語詞的翻譯，因此，對這部分有興趣的讀者們，不妨參照其他邏輯書所提到的翻譯，想想看怎麼翻譯才能切中語句所要表達的意義。透過這種練習，相信你一定能在日常語言的修辭上更上一層樓，也比較不會有說話不得體，或是讓別人誤解的情況出現。

羅素 (Bertrand Russell, 1872–1970)

英國哲學家、邏輯學家和文學家。對於邏輯和數學的重要工作集中在 1900–1913 年間，期間包括提出邏輯主義的主張。提出羅素悖論，此類悖論的形式就是涉及自我指涉的問題。提出類層論，企圖以該理論解決悖論問題。代表著作為《數學原理》。





一階邏輯的演算系統

「唉！怎麼剛買的股票又跌了。昨天小王還跟我分析了半天，說什麼一定漲。漲個大頭鬼啦，哼！真是氣死我了。」靜玫是個標準的菜籃股票族。學歷不高的她，憑著堅強的毅力，在結婚二十幾年後，和丈夫的共同努力下，好不容易也攢了些辛苦錢。由於兒女都已經長大，也各自獨立了，靜玫除了守著開著小貨車，到處送雜貨的先生外，生活裡最重要的事，就是每天早上趁著買菜的時間，一溜煙兒地跑到號子裡面。

剛開始的時候，只是因為兒女長大之後倍覺無聊。自從兒女離開身邊，丈夫每天仍早早起來開著小貨車忙活，一個人總是覺得生活空虛。為了能夠紓解自己的鬱悶，靜玫到市場買菜的時候，就喜歡跟攤商攀攀交情，跟許多同為家庭主婦的東家李太太、西家陳太太駐足聊天，感覺上總是吸收點兒人氣。直到有一天，她認識了宜芳之後，才開始跟股票有所接觸。

靜玫初識宜芳的時候，宜芳早就在股票市場打滾多年。碰巧宜芳遇上了股票大漲的時機，怎麼買怎麼賺，有了私房錢之後，就常喜歡買點兒珠光寶氣的首飾犒賞自己。靜玫三天兩頭地聽著宜芳的光榮事蹟，當然也就漸漸地心動了。尤其回到家，面對空蕩蕩的家具和寂靜的空氣，更讓她燃起另覓生活重心





的想法。剛開始的時候，她也只是想和宜芳去見識見識什麼是股票市場，然而日子久了，加上宜芳在號子裡殺進殺出的那股勁兒，讓她也就一頭栽進了股票市場。

起初，靜玫和許多股票族的初生之犢一樣，只敢小量進出。看到一張十幾萬的股票，她是連想都不敢想，有朝一日會買賣這些股票，因為對她來說，十幾萬可是要辛辛苦苦努力許久才攢得下來的。然而在號子的宜芳，總是動輒數百萬的進出，靜玫覺得看了挺嚇人的。可是宜芳總是告訴她：「股票這玩意兒賭的是投資報酬率，妳想想每天都有漲跌幅限制，投資的多回收就快。像妳這樣每次都一、二萬的進出，就算給妳漲停板也不過幾百塊錢，連工錢都不夠。」

靜玫每次聽宜芳這麼說，心裡總是想著：「可是我不敢一次買太多錢，萬一通通虧了怎麼辦。更何況，自己對股票是什麼都還不了解，怎麼敢把自己的錢都投資在這上頭。」可是靜玫總是笑笑地對宜芳說：「我比較沒膽啦！也不知道那些彎彎曲曲的線是做啥用的，所以不敢買太多。」而宜芳已經不只一次地告訴她：「呵呵呵，妳當我知道那些線是什麼意思嗎？我又不是經濟系畢業的。可是買股票看的不是那些東西，而是膽量大、眼光準、下手快，這才是賺錢的依據。

妳當我那些鑽戒和珍珠項鍊怎麼來的？都是靠膽量賺來的。」在耳濡目染下，靜玫下單的金額也越來越大。

股票還在大好的時機，靜玫矇著頭跟著宜芳進出，的確賺了一些錢。而她也對這樣的新生活滿意極了，因為她不但賺了錢，而且還可以到首飾店去買些首飾裝扮自己。不久之後，她也自己開始嘗試獨立作業，從坊間可以收集到的馬路消息，成了她最重要的資訊來源，除了宜芳之外，她也結交了一批新的朋友。而她的營業員小王就是新朋友介紹給她認識的。

小王是個三十來歲的年輕小夥子，可是在營業員的經驗上已經有五、六年了。憑著他對於各種線性分析的功力，不但一方面積極開拓客戶群，另一方面更會兼任分析師，偶爾替公司做做收盤分析和預測的工作。靜玫覺得小王的專業深深吸引著她，她認定小王一定可以幫助她創造她夢想中的財富。於是她經常請教小王什麼時候該進、什麼時候該出。而小王雖然熟稔股票市場的各種線性分析，但是他也知道，沒有人可以百分之百預測未來的走勢，頂多只是賭賭機率罷了，他總是跟靜玫說：「我提供的只是參考而已，所有的決定權在您手上，要進要出必須您自己決定。」



很不幸地，靜玫遇上了股

災，在一片股民的哀鴻遍野中，也有著靜玫的吶喊。她賠上了大半的積蓄，原來添購的首飾也都一一變賣，可是股災並未擊退靜玫，她認定從哪裡跌倒就要從哪裡站起來，所以她決定全力一博。因此，她經常在收盤後留在號子裡，看著每天新出來的線性結構，開始聽分析師怎麼分析，漸漸地她自認為懂得夠多了，也開始依據這些理論去投資。可是人算總是不如天算，昨天她興沖沖地和小王討論了半天，覺得根據線性分析一定會漲的股票，結果又跌了。聽著靜玫的牢騷，小王得趕緊澄清自己的立場。

「方太太，我跟您說過了啊！線性分析只能做參考，不能保證股票走勢一定會按著線性分析之後的預測走，更何況昨天一直說保證漲的是妳，可不是我。我只是說按照線性分析來看，應該會漲才對。」靜玫聽著小王的辯解，心裡的牢騷可沒少半點兒：「對啦！對啦！按照線性分析會漲啦，可是誰知道國際油價跟物料的波動是什麼玩意兒？怎麼宣布個消息，整個股票市場開始大亂。我好不容易覺得稍微會看線性分析了，難不成還要去學國際期貨市場的交易，我不過是買張股票耶！賺點兒零用錢還得知道國際局勢喔，太誇張了吧！」



小王很無辜地說：「方太太，事實的確是如此。現在是資本主義社會，整個股票市場和國際的

經濟情勢當然是息息相關，國際上的風吹草動都會影響股票市場，所以真的要準確掌握股票的走勢，就必須了解國際情勢。像前幾年美國發生 911 事件，全球因為恐懼戰爭發生，股票市場大跌，期貨市場大漲，黃金也漲價。所以得看國際局勢，才能掌握全盤。」靜玫還是不服氣地說道：「真的有點兒誇張啦，我就是買股票而已，難道得成為國際專家才行嗎?」

小王安慰著靜玫：「當然也沒那麼誇張啦！可是在現代社會要求生存，或者是要賺錢，所要了解的東西越來越多。就像您剛開始看線性分析的時候，覺得如果看懂了就真的可以在股票市場裡賺到錢。其實大致上來說是可以的，可是您想想看，大部分在號子裡活動的人，哪一個人不會看線性分析？大部分都會吧，可是仍然是賺錢者少而賠錢者多，原因是什麼呢？不了解國際局勢嗎？也不盡然。我還聽過更誇張的是有所謂的『內線交易』。一堆作手商量好了拉抬某些股票，等到像您這樣的散户進場跟進的時候，他們就開始大量出清，散户被蒙在鼓裡還以為情勢一片大好。等到他們都已經賺飽了，散户也就被套牢了。雖然這是違法的行為，可是只要有錢賺，人啊！殺頭的生意都敢作，管它道不道德呢！」

靜玫開始覺得股票市場並不是單純地買進賣出，其中的學問可大得很。憑著自己三腳貓的功夫，在這裡面殺進殺出實在有點兒愚蠢。因為即使賺到了錢，也不過是蠅頭小



利，而自己卻必須為了這蠅頭小利，花費這麼多心力。她想，如果真的要做，就應該讓自己成為專家才對。賣掉了最後一批股票，靜玫決定好好休息一陣子。過了幾年，她重新回到號子裡，小王早已經高升為經理了，往事歷歷，她想如果早點兒給她機會的話，她會好好地去研究經濟學的問題。

現代社會可說是個競爭激烈的社會，每個想要在社會中冒出頭的人，都必須具備許多技能，以往依靠單一技能生存的模式，顯然已經遠去。可是，所謂的專業技能，並不如想像中的單純。一如故事中的股票投資者，以為只要知道股票的知識就好了，殊不知影響股票走勢的因素實在太多了，如果真的要掌握股票走勢，就必須認真地研究各種影響因素（包括國際油價、期貨價格等等）。

同樣地，當我們在日常生活中遇到問題時，才會驚覺應該好好地了解邏輯是什麼？但是，用語句邏輯的方式檢驗論證，只不過是入門功夫罷了。就像故事中的靜玫以為學會看線性分析，就可以了解股票走勢一樣。事實上，真的要掌握股票走勢的話，還真的得花功夫了解國際局勢才行。所以，在學習邏輯這門學問的時候，除了基本功夫之外，還得努力讓自己精進才是。

學習不嫌晚，只要開始就會有收穫。雖然從語句邏

輯進入到一階邏輯，在演算上會顯得比較複雜。但是只要能夠掌握規則，相信你還是可以運用自如，在日常生活的溝通上顯得更加有自信。

一階邏輯的公理系統

所謂的一階邏輯語言是以語句邏輯語言為基礎，擴充而得的語言。此一擴充方式，無非是因應分析語句結構之後的需要，而加入某些新的符號。例如個體常元、個體變元、述詞符號等等。通過對語意蘊涵關係（第六章）的分析，可以了解在一階邏輯語言中，增加的符號的意義，以及如何利用語意說明有效論證。接下來，我們要進一步說明語法蘊涵關係。

以語法的蘊涵關係的觀點看有效論證，是指：從論證的前提經由適當的推論規則可以得到結論。換言之，結論可以從前提推導出來。有了這個基本想法之後，就要設計一個系統來處理一階邏輯中的論證（用來清楚地區分哪些論證是有效論證，哪些又是無效論證）。

首先登場的是公理系統。一階邏輯既然是由語句邏輯擴充而得，那麼一階邏輯的公理系統，就可以視為語句邏輯的公理系統的擴充。不難想像，一階邏輯的公理系統，無非



就是在語句邏輯的公理系統原有的公理和推論規則之外，再增加一些公理或推論規則，才能處理一階邏輯中的有效論證。一階邏輯的公理系統如下：

◆**公理** (axioms)

原有	(A1)	$(\varphi\to(\psi\to\varphi))$	
	(A2)	$((\varphi\to(\psi\to\theta))\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\theta)))$	
	(A3)	$((\neg\varphi\to\neg\psi)\to(\psi\to\varphi))$	
增加	(A4)	$((\forall x)\varphi\to\varphi)$	（如果在 φ 式子中，並未出現變元 x 的情況下。）
	(A5)	$((\forall x)\varphi(x)\to\varphi(a/x))$	（如果在 φ 式子中出現變元 x 的情況下，則可以用任意個體常元替代之。）
	(A6)	$((\forall x)(\varphi\to\psi(x))\to(\varphi\to(\forall x)\psi(x))$	（如果變元 x 並未出現在 φ 式子中的情況下。）

◆**推論規則** (rules of inference)

原有	(MP) 從 φ 和 $(\varphi\to\psi)$ 成立，可以推論出 ψ 成立。
	(GEN) 在 φ(a) 是成立的定理情況下，可以導出 $(\forall x)\varphi(x/a)$。（此處出現的 a，稱之為名稱符號 (name letter) 而

增加	不是個體常元 (individual constant)。名稱符號的特徵就是還沒有給予解釋，換言之，就是尚未被用來指涉某個特定對象，因此可以用全稱量化詞表示。對於名稱符號和個體常元之間的區別，初學者通常會有所混淆。不過，說明公理系統的目的，是讓我們欣賞邏輯學家的辛苦與努力，不妨將此一問題當作自我挑戰。)

相信各位初見此一公理系統時，一定會如丈二金剛，摸不到頭腦。別擔心，待我慢慢道來，向各位解說一番：

1. 由於一階邏輯的公理系統，是從語句邏輯的公理系統擴充而得。因此不難發現，(A1)−(A3) 其實就是語句邏輯的公理系統中的公理，而 (A4)−(A6) 則是擴充後所增加的公理。(A4) 的意思是當語句 φ 中沒有出現個體變元 x 時，就可以將 $\forall$x 去掉，因為這個符號顯然是多餘的。例如，當我們看到 $(\forall x)Pa$ 這類的語句時，由於 Pa 中並沒有 x 出現，因此可以認定從 $(\forall x)Pa$ 推論而得到的 Pa 是合理的，也就是 $(\forall x)Pa\rightarrow Pa$。所以只要語句 φ 中沒有出現的個體變元，都可以用 (A4) 的方式將語句整理成較簡單的語句，例如 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Px\wedge Qxy)$，在 $(Px\wedge Qxy)$ 中並未出現個體變元 z，因此可以將 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Px\wedge Qxy)$ 寫成 $(\forall x)(\forall y)(Px\wedge Qxy)$。而 (A5) 的意思則是當語句 φ 中出現個體變元 x 時，在語句 φ 中的 x 可以用任意個體常元代入，因此寫成 $\varphi(a/x)$，以 a 代表



個體常元代入 x 的位置。例如 $(\forall x)(Px \vee Rx)$ 中，x 出現的位置可以用 a 代入，寫成 $(Pa \vee Ra)$，也可以用 b 代入，寫成 $(Pb \vee Rb)$ 等等。(A6) 則表示語句 φ 中沒有出現 x 的情況，就可以將量化詞移至另一語句前方，而無須寫在整個語句前方。例如 $(\forall x)(Pa \rightarrow Qx)$，x 並未出現在 Pa 中，因此可以將 $(\forall x)(Pa \rightarrow Qx)$ 寫成 $Pa \rightarrow (\forall x)Qx$。另一方面，推論規則 (MP) 是語句邏輯的公理系統中的推論規則，而 (GEN) 則是新增的推論規則。

2. 在介紹一階邏輯語言的時候，有兩個量化詞符號：∀ 和 ∃。但是，在一階邏輯的公理系統中，卻只出現 ∀，而 ∃ 並未出現。為什麼呢？其實是因為 ∀ 和 ∃ 兩個符號之間是可以相互定義的。所以，在公理系統越簡潔越好的考量下，當然就處理其中一個符號即可。而另一個符號就用定義的方式呈現：$(\exists x)\varphi$ 定義為 $\neg(\forall x)\neg\varphi$。
3. 在運用推論規則 (GEN) 時，必須特別注意的是——在 φ 是成立的定理情況下才能使用。

為了容易明瞭如何運用 (GEN) 規則，請各位先回憶一下，在說明語句邏輯的公理系統時，曾證明 $(p \rightarrow p)$ 是定理，而 P 既然是任意語句，那麼在 p 的位置代入一階邏輯語言中的語句，當然也是定理。所以，讓我們用 Pa 代入 p 的位置，因此 $(Pa \rightarrow Pa)$ 也是定理殆無疑義。

接下來，既然 $(Pa \rightarrow Pa)$ 是定理，那麼根據 (GEN) 規則，

$\forall x(Px\rightarrow Px)$ 也是定理。所以，如果將 (GEN) 規則中出現的 $\varphi(a)$ 當作 $(Pa\rightarrow Pa)$，那麼規則中的 $\forall x\varphi(x)$ 就是指 $\forall x(Px\rightarrow Px)$。因此，在 (GEN) 規則中，要求 $\varphi(a)$ 為定理是非常重要的。

至於公理系統在演算上會遭遇的困難，在語句邏輯的公理系統已經說明過（第四章）。因此，介紹一階邏輯的公理系統的主要目的，不在將這個系統作為推論的主要工具，而是體會公理系統的重要性，因為在許多學科中，都希望能夠利用公理系統處理該學科的理論，或者說把理論公理化 (axiomatization)。簡而言之，用公理系統表達某個理論所展現的簡潔性，是其他系統望塵莫及的。舉個簡單例子說明，如何利用公理系統進行演算：

證明「$((\forall x)\varphi(x)\leftrightarrow(\forall y)\varphi(y))$」是定理。這個定理要說明的是如果把量化詞所限定的變元由 x 變成 y，同時將語句中所有 x 也改成 y 的話，這兩個語句是等值的。所以，假設有個語句是 $(\forall x)(Px\rightarrow Qx)$，我們可以將這個語句改寫為 $(\forall y)(Py\rightarrow Qy)$，而不會影響推論結果。也就是說 $((\forall x)(Px\rightarrow Qx)\leftrightarrow(\forall y)(Py\rightarrow Qy))$ 是成立的。接下來，讓我們用公理系統證明此定理。

⑴ $(\forall x)\varphi(x)$ assumption（作為預設的前提）
⑵ $(\forall x)\varphi(x)\rightarrow\varphi(a)$ (A5)
⑶ $\varphi(a)$ ⑴，⑵ MP
⑷ $(\forall y)\varphi(y)$ ⑶ GEN
$\therefore(\forall x)\varphi(x)\rightarrow(\forall y)\varphi(y)$

上述的證明的方式是利用 $(\forall x)\varphi(x)$ 作為前提，如果可以推論出 $(\forall y)\varphi(y)$，那麼就表示 $(\forall x)\varphi(x)\rightarrow(\forall y)\varphi(y)$ 成立。反之，我們也可以利用 $(\forall y)\varphi(y)$ 作為前提推論出 $(\forall x)\varphi(x)$ 成立，其證明如下：

⑴ $(\forall y)\varphi(y)$ assumption（作為預設的前提）
⑵ $(\forall y)\varphi(y)\rightarrow\varphi(a)$ (A5)
⑶ $\varphi(a)$ ⑴，⑵ MP
⑷ $(\forall x)\varphi(x)$ ⑶ GEN
⑷ $(\forall y)\varphi(y)\rightarrow(\forall x)\varphi(x)$

結合上述兩個證明，既然 $(\forall x)\varphi(x)\rightarrow(\forall y)\varphi(y)$ 和 $(\forall y)\varphi(y)\rightarrow(\forall x)\varphi(x)$ 均成立，那麼 $(\forall x)\varphi(x)\leftrightarrow(\forall y)\varphi(y)$ 當然就成立，因此 $(\forall x)\varphi(x)\leftrightarrow(\forall y)\varphi(y)$ 是定理。

一階邏輯的真值樹系統

由於公理系統在判斷論證有效與否時，除非是天縱英明，否則難以掌握。因此，我們還是利用較有效率的真值樹系統來面對決定論證有效與否的問題，相信能使讀者更容

易進入狀況。

一階邏輯的真值樹系統當然包含語句邏輯的真值樹系統的推論規則在內（第四章)。此外還增加一些新的推論規則：

1. 量化詞符號的推論規則

(1) $(R_{\forall})$ 規則

$$\begin{array}{c}(\forall x)\varphi(x)\\ |\\ \varphi(a/x)\end{array}$$

(2) $(R_{\exists})$ 規則

$$\begin{array}{c}(\exists x)\varphi(x)\\ |\\ \varphi(a/x)\end{array}$$

全稱量化詞符號「∀」的意思是「所有的」。因此，∀xPx 的意思就是論域 D 中所有個體都具有 P 這個性質。所以在推論過程中，必須將論域 D 中所有個體都代入 x 的位置，才算完成推論。例如論域 D 中有三個個體 {a,b,c}，那麼 ∀xPx 可寫成 Pa∧Pb∧Pc 的形式，意思就是在推論中所有個體 (a, b,c) 都有 P 這個性質。而上述推論規則 $(R_{\forall})$ 的意思就是，論域中出現的每一個個體都必須代入 x 的位置。

接下來，讓我們進入推論規則 $(R_{\exists})$。所謂存在量化詞符號「∃」的意思是，在論域 D 中至少有一個個體，可以代入邏輯語句中個體變元 x 出現的位置。不過在取代的步驟上必須注意，選擇代入 x 的個體常元時，「不能」是推論過程



中曾經出現過的個體常元。假設在某推論中，個體常元 a 已經出現過，那麼在應用推論規則 ($R_{\exists}$) 時，就不能用個體常元 a 取代 ∃ 所限定的個體變元 x，必須使用新的個體常元 b 來取代。

> 因為出現過的個體常元所指涉的個體，是否滿足邏輯語句所描述的狀況，是無法確定的。所以，在使用個體常元取代以「∃」所限定的 x 時，必須使用「新的」個體常元，才不至於出錯喔！

2. 量化詞符號前面出現「¬」的推論規則

(3) ($R_{\neg\forall}$) 規則

$$\neg(\forall x)\ \varphi(x)$$
$$|$$
$$(\exists x)\neg\varphi(x)$$

(4) ($R_{\neg\exists}$) 規則

$$\neg(\exists x)\ \varphi(x)$$
$$|$$
$$(\forall x)\neg\varphi(x)$$

由於 ∀ 和 ∃ 可以相互定義，因此如果在邏輯語句的量化詞前面，出現了語句連接詞 ¬，就必須特別注意量化詞符號的改變情形。

首先，遇到邏輯語句的量化詞符號前方出現 ¬ 的情形時，必須先用 ($R_{\neg\forall}$) 或 ($R_{\neg\exists}$) 處理 ¬。其次，才能用 ($R_{\forall}$) 或者 ($R_{\exists}$) 處理量化詞符號。處理的順序不可顛倒，否則會發生推論錯誤的情況。真值樹系統的推論過程，都是從標示範圍最大的語句連接詞開始處理。所以，當 ¬ 出現在邏輯語句的最前方時，表示其標示的範圍最大，因此必須從 ¬ 開

始處理。

3.「=」的推論規則

(5)　($R_{=}$) 規則

$$\begin{array}{c} \varphi(a) \\ a=b \\ | \\ \varphi(b) \end{array}$$

(6)　(R_{x}) 規則

$$\begin{array}{c} | \\ \neg a=a \\ \times \end{array}$$

雖然在一階邏輯語言中，等同符號 = 並不是必要的，但是為了簡單起見，我們在這裡加入 = 符號。這是因為加入 =，可使我們用邏輯語句表達時，省下不少麻煩。

4.有效論證的證明

一階邏輯的真值樹系統，基本想法和語句邏輯中的真值樹系統並無二致，其推論步驟如下：

1. 先將結論加上否定號 (¬)
2. 經由推論規則展開真值樹
3. 如果所有的路徑都產生矛盾（劃記 x）
4. 則此論證是有效論證
5. 如果有某個路徑並未產生矛盾（沒有劃記 x），則表示



該論證是無效論證。而欲說明該論證是無效論證，就必須寫出反例加以解釋。

【例一】：(∃x)(∃y)(Pxy∨Pyx)/∴(∃x)(∃y)Pxy

1.	(∃x)(∃y)(Pxy∨Pyx)		
2.	¬(∃x)(∃y)Pxy		
3.	(∀x)¬(∃y)Pxy		
4.	(∀x)(∀y)¬Pxy		
5.	(∃y)(Pay∨Pya)		
6.	(Pab∨Pba)		
7.	Pab	8.	Pba
9.	(∀y)¬Pay	11.	(∀y)¬Pay
10.	(∀y)¬Pby	12.	(∀y)¬Pby
13.	¬Paa	15.	¬Pba
14.	¬Pab	16.	¬Pbb
	X		X

為了方便解說，特意在每一個推論步驟的前方加上編號，以便說明。現在我們從真值樹的開頭開始，逐步分析推論過程：

語句 1.：前提。

語句 2.：加上 ¬ 的結論。

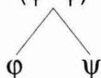
語句 3.：語句 2. 利用 $(R_{\neg\exists})$ 所得到的。

語句 4.：語句 3. 利用 $(R_{\neg\exists})$ 所得到的。

語句 5.：語句 1. 利用 $(R_{\exists})$ 所得到的。（可以用個體常元

a，取代∃所限定的個體變元 x。理由在於個體常元 a 並未在之前的推論過程（即，語句 1. 2. 3. 4.）出現過，所以是新的個體常元。）

語句 6.：語句 5. 利用 $(R_{\exists})$ 所得到的。（在這裡用個體常元 b，取代∃所限定的個體變元 y。理由在於，個體常元 a 已經在語句 5. 出現過，所以不能用個體常元 a，取代∃所限定的個體變元 y，必須使用未出現過的個體常元。因此，選擇新的個體常元 b 取代∃所限定的個體變元 y。）

語句 7. 8.：利用推論規則  將語句 6. 分成兩個分枝。

語句 9. 10.：語句 4. 利用 $(R_{\forall})$ 規則所得到的。（語句 4. 為 (∀x)(∀y)¬Pxy，語句 9. 10. 則是 (∀y)¬Pay 和 (∀y)¬Pby。在這裡用出現過的個體常元 a 和 b，分別取代語句 4. 中 ∀ 所限定的個體變元 x。為什麼要這麼做呢？理由在於，∀ 這個量化詞所代表的意義是所有的，因此遇到 ∀ 這個量化詞時，所有出現過的個體常元符號都要代入，才算完成推論的工作。而在這個推論中，在語句 9. 出現之前，已經出現的個體常元有 a 和 b，所以應該將語句 4. (∀x)(∀y)¬Pxy 中的 x



分別代入 a 和代入 b，因此會出現語句 9.和語句 10.。）

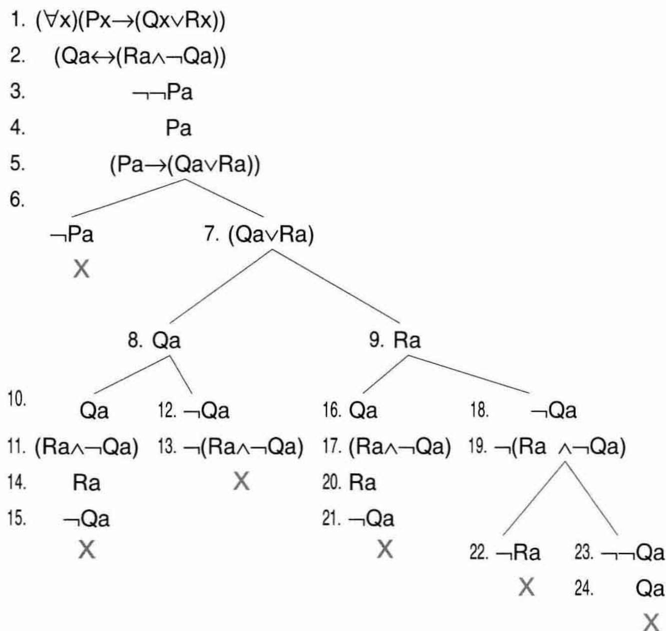
語句 11.12.：語句 4.利用 $(R_\forall)$ 規則所得到的。（理由同上。因為有兩個分枝出現，所以語句 4.的分解結果不僅要在另一個分枝出現，也要在這個分枝出現。換言之，語句 4.和這兩個分枝都有關，所以兩個分枝都要有語句 4.的推論結果。）

語句 13.14.：語句 9.利用 $(R_\forall)$ 規則所得到的。（用出現過的個體常元 a 和 b，分別取代語句 9. $(\forall y)\neg Pay$ 中，$\forall$ 所限定的個體變元 y，就會出現語句 13. $\neg Paa$ 和語句 14. $\neg Pab$。由於語句 14.的出現，使這個分枝產生矛盾（語句 7.和語句 14.），因此可以確定此分枝可以畫上矛盾記號「x」。語句 9.必須代入曾經出現過的個體常元 a 和 b，才算完成推論。

語句 15.16.：語句 12.利用 $(R_\forall)$ 規則所得到的。（理由同上）

【例一】的真值樹，最後分成兩個分枝。就左邊的分枝來看，有產生矛盾的情況（語句 7. Pab 和語句 14. $\neg Pab$）；同樣地，右邊的分枝也產生矛盾的情況（語句 8. Pba 和語句 15. $\neg Pba$）。換言之，【例一】的真值樹所有分枝都產生矛盾，通過上述真值樹的演算，可以證明——論證【例一】是有效論證。

【例二】：$(\forall x)(Px \rightarrow (Qx \vee Rx)), (Qa \leftrightarrow (Ra \wedge \neg Qa)) \,/\, \therefore \neg Pa$



語句 1.： 前提。

語句 2.： 前提。

語句 3.： 加上 ¬ 的結論。

語句 4.： 語句 3. 利用 $\neg\neg\varphi$ 的推論規則所得到的。

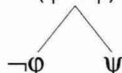
$$\begin{array}{c}\neg\neg\varphi \\ | \\ \varphi\end{array}$$

語句 5.： 語句 1. 利用 ($R_\forall$) 規則所得到的。(在這裡可以用出現過的個體常元 a 取代 ∀ 所限定的個體變元

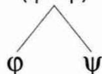


x。理由在於，對 ∀ 這個量化詞來說，論域 D 中所有個體，都可以取代 ∀ 所限定的個體變元 x，所以當然包括個體常元 a。）

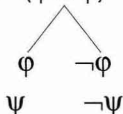
語句 6. 7.：利用規則 (φ→ψ) 將語句 5.分成兩個分枝。



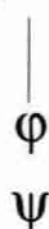
語句 8. 9.：利用規則 (φ∨ψ) 將語句 7.分成兩個分枝。



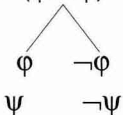
語句 10. 11. 12. 13.：利用規則 (φ↔ψ) 分解語句 2.所得。



語句 14. 15.：利用推論規則(φ∧ψ)分解語句 11.所得到的。



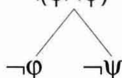
語句 16. 17. 18. 19.：利用規則 (φ↔ψ) 分解語句 2.所得。



語句 20. 21.：利用推論規則(φ∧ψ)分解語句 17.所得到的。



語句 22. 23.：利用規則 $\neg(\varphi\wedge\psi)$ 分解語句 19.所得。



語句 24.：語句 23.利用 $\neg\neg\varphi$ 的推論規則所得到的。



將論證以真值樹的方式展開後，將每一個分枝的狀況列出，檢查是否產生矛盾。其實，僅需檢查原子語句（如 Pa），和含否定號的原子語句（如 ¬Pa）即可，因此在集合中僅列出這兩類語句，就可看出產生矛盾的狀況：

分枝(1)：由語句 1. 2. 3. 4. 5. 6. 組成——{Pa, ¬Pa}

分枝(2)：由語句 1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 10. 11. 14. 15. 組成——{Pa, Qa, Ra, ¬Qa}

分枝(3)：由語句 1. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 12. 13. 組成——{Pa, Qa, ¬Qa}（在這個分枝中的語句 13.並未分解成最原子語句的形式，原因是在還沒分解語句 13.之前，就已經有矛盾產生，因此，可以不用再行分解。）

分枝(4)：由語句 1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 16. 17. 20. 21. 組成——{Pa, Ra, Qa, ¬Qa}

分枝(5)：由語句 1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 18. 19. 22. 組成——{Pa, Ra, ¬Qa, Ra}

分枝(6)：由語句 1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 18. 19. 23. 24. 組成——{Pa, Ra, ¬Qa, Qa}

顯而易見地，由分枝(1)到分枝(6)都產生矛盾，因此在分枝底



下都會畫上「x」。根據真值樹系統的觀點，【例二】是有效論證。

解釋與反例結構

如果是無效論證呢?在真值樹系統中，如何處理無效論證呢?我們知道，在真值樹系統中，如果有某個路徑並未產生矛盾（沒有劃記 x)，則表示該論證是無效論證。但是這樣並不足以證明該論證是無效論證，別忘了，還必須寫出反例加以解釋才行哦!

用反例解釋的方法有二：(1)以顯示反例結構的方式，或是(2)利用說明符號的意義的方式。

【例三】：$(\exists x)(\exists y)Pxy / \therefore (\exists y)Pyy$

1. $(\exists x)(\exists y)Pxy$
2. $\neg(\exists y)Pyy$
3. $(\forall y)\neg Pyy$
4. $(\exists y)Pay$
5. Pab
6. $\neg Paa$
7. $\neg Pbb$

> 將【例三】用真值樹完全展開後，發現整個路徑並沒有出現矛盾。於是這個路徑就提供了一個反例結構。而這個反例結構，就是用來證明【例三】是無效論證的一個「解釋」。
>
> 賦予所有出現的命題符號一組真假值，這組真假值的特徵是，可以讓論證的前提皆真而結論為假，這組命題符號的真假值就稱為反例結構。

語句 1.：前提

語句 2.：結論加上否定號

語句 3.：根據規則 $(R_{\neg\exists})$，由語句 2. 的 $\neg(\exists_y)Pyy$ 得到語句 $3(\forall_y)\neg Pyy$ 的形式。

語句 4.：根據 ($R_\exists$)，將個體常元 a 代入，語句 1.的 x 位置，得到 $(\exists_y)Pay$ 的形式。由於推論過程中未出現 a，所以可以用 a 代入。

語句 5.：根據 ($R_\exists$)，將個體常元 b 代入語句 4.的 y 位置，得到 Pab 的形式。由於 a 已在前面推論過程中出現，因此要用新的符號 b 代入 y 的位置。

語句 6.：根據 ($R_\forall$) 規則，由於推論過程出現 a，所以將 a 代入 y 的位置，得到 ¬Paa 的形式。

語句 7.：根據 ($R_\forall$) 規則，推論過程出現 b，所以將 b 代入 y 的位置，得到 ¬Pbb。

⑴反例結構的解釋方式

先仔細觀察，在這個真值樹中，出現的個體常元只有 a 和 b，因此為了簡單起見，就規定論域 D (Domain) 就是 {a, b}。所謂反例，就是前提皆真而結論為假的情況。因此，說明展開式中的 Pab、¬Paa、¬Pbb 可以同時為真，就是提供反例的意思。如果仿造語句邏輯的真值樹系統的方式，可以將反例表示成：

論域 D：{a, b}



Pab	Paa	Pbb
T	F	F

不過，這個表示方法不夠專業，為了讓讀者耳目一新，我將專業寫法明確列出供各位比較。

論域 D：{a, b}
Pxy：{〈a, b〉}
¬Pxy：{〈a, a〉，〈b, b〉}

表示次序關係的符號：〈 , 〉(ordered pair)。注意〈a, b〉≠〈b, a〉。

其實這兩種寫法所表現的意思是一樣的，Pxy:{〈a, b〉} 的意思就是 Pab 這句話為真的意思。¬Pxy:{〈a, a〉，〈b, b〉} 的意思則是 ¬Paa、¬Pbb 為真，既然 ¬Paa、¬Pbb 為真，那麼 Paa、Pbb 就為假。至於為什麼要用〈 , 〉這個符號，稍後會有更詳細的說明。

⑵符號意義的解釋方式

論域：所有的人，或者可以只有兩個個體：{ 張良，張梓 }。
a：張良。
b：張梓。
Pxy：x 是 y 的父親。

將這些設定代入，則表示由（前提）張良是張梓的父親，推

論不出（結論）張梓是張梓的父親。所以是【例三】的反例。

透過解釋的方法，可以證明該論證是無效論證。而上述兩種解釋的方法，都可以看成是【例三】的反例結構。所以，要證明【例三】是無效論證的時候，只要用其中一種即可。

需要特別注意的是，在一階邏輯的真值樹系統中，要顯示反例結構時，必須達到幾點要求：

⑴必須明確地標示論域 D。在說明何謂一階邏輯時，已經明確指出，所謂的一階邏輯語言是述及個體的語言。所以，在呈現反例結構時，就必須先標示這個反例結構所述及的個體是哪些。舉例來說，如果用真值樹展開某個論證，當真值樹達到完全展開的狀況之後，發現總共用到了三個個體常元，那麼論域 D 就可以看成是這三個個體常元的集合。記為——D: {a, b, c}。

⑵如果出現命題符號，則標示真假值。命題符號代表語句，所以在反例結構中的標示方法，仍然和語句邏輯的真值樹系統標示方法相同，也就是將此語句在反例結構中的真假值標示出來即可。（參照第四章）

⑶語句包含述詞的表示方法。在反例結構中，會出現原子語句（例如 Pa, Qab 等）或者加上否定號的原子語句（例如 ¬Pa, ¬Qab 等）的形式。根據這些語句，就可以知道怎麼寫反例了。例如，Pa 出現在反例結構時，就用 Px: {a} 表示。如果是 ¬Qab 出現在反例結構中，則用 ¬Qxy:{〈a, b〉} 表示。依此類推，將所有出現在反例結構中的原子語



句，一一寫成上述的形式，就完成了。

為了使讀者更清楚語句中包含二元（或以上）述詞的情況，在此特別說明次序 (order) 問題。在介紹一階邏輯的語意學時，曾經強調過，個體常元或者個體變元出現的位置並不是任意的，必須注意次序問題。

因此，為了顯示次序關係，必須引進標示次序關係的符號〈 , 〉(ordered pair)。為什麼需要引進這個符號呢？因為光用集合，並不能顯示出次序的關係。如果各位讀者不陌生的話，一定知道從集合的觀點看，{a, b}={b, a}，所以，如果用 Pxy: {a, b} 表示，我們就不知道應該寫成 Pab 還是 Pba 了。所以需要用〈 , 〉顯示次序的關係（〈a, b〉≠〈b, a〉），用以強調 Pab 和 Pba 是不同的。

舉個簡單的例子說明一下。如果二元述詞 Pxy 表示「x 是 y 的父親」，〈a, b〉滿足述詞 Pxy 的意思是「a 是 b 的父親」，那麼〈b, a〉顯然不會滿足述詞 Pxy，因為在 a 是 b 的父親成立的情況下，b 是 a 的父親顯然並不成立。所以，如果要顯示反例結構中的語句包含二元（或以上）的述詞情況，就必須利用可以標示次序關係的符號。

設想論域 D 為 {a, b, c}，在反例結構中滿足述詞 Pxy 的是〈a, b〉和〈b, c〉，滿足 ¬Pxy 的是〈a, c〉，那麼這些語句在反例結構表示為：

Pxy: {〈a, b〉,〈b, c〉}

$$\neg Pxy: \{\langle a, c\rangle\}$$

上述的表示法，可以推廣到語句出現 n 元述詞的情況：

$$P^n(x_1, \cdots, x_n): \{\langle a_1, \cdots, a_n\rangle, \langle b_1, \cdots, b_n\rangle, \cdots\}$$
$$\neg P^n(x_1, \cdots, x_n): \{\langle a_1, \cdots, a_n\rangle, \langle b_1, \cdots, b_n\rangle, \cdots\}$$

經過一階邏輯演算系統的洗禮之後，讀者們可以很有自信地告訴別人，你真正學過邏輯了。由於一階邏輯的演算比起語句邏輯複雜得多，因此也使許多人望而卻步，不過由於這個部分是邏輯向前邁進的重大成就，所以無法略而不提。剛開始接觸邏輯的讀者們，不妨多試幾次，相信可慢慢掌握箇中奧妙，畢竟不是所有的菜都可以大火快炒，有些是需要小火慢燉，才能煮出好味道的。

本章小結

本章主要介紹一階邏輯的演算系統，而推論規則也是一般人較少接觸過的，因此通常陌生感較大。在章首故事中，我要傳達的是現代人所面對的困境，由於世界網絡日趨複雜，各個部門領域之間的線也越來越密切，想要生存得好就必須不斷面對新的挑戰，學新的技能。所以，雖然這個部分看起來有點難以理解，我仍然試圖盡力讓各位讀者能夠享受邏輯的樂趣。

9

常見的謬誤

在滂沱大雨中，碎花傘面下落著孤獨的身影。天空落下的雨點，在傘面上飛舞著催淚的音符。傘下的可娟，默默地滴著自心底湧出的淚。恰巧交織著大雨吧！可娟眼中只剩下模糊一片，彷彿只有她一個人存在於世界上。她剛和相戀七年之久的翰彬分手，沒有任何不捨與留戀的翰彬，只匆匆地說聲：「我們分手吧，再見！」就消失在街道的盡頭。可娟的世界一下子光芒全失，她甚至不知道自己正往哪個方向走著。

「鈴……，鈴……」聲響雖熟悉，卻不是她設定好最盼望的聲響。可娟打開手機蓋，抽抽噎噎地回著：「喂……」。好友莉莉一聽到可娟的聲音，馬上覺得不對勁。急忙問道：「喂，娟，妳怎麼了。妳剛剛哭了嗎？怎麼回事呢？」聽到莉莉殷殷的關切，可娟再也按捺不住決堤般的淚水，「哇！」的一聲大哭了起來。



聽到好友淚水潰堤的莉莉，一下子全慌了手腳，心想得趕緊找到可娟才行，但可娟只在電話那頭不斷抽噎。莉莉直勸著可娟：「娟，告訴我妳在哪裡，好不好？我過去找妳。」可娟無法止住淚水，斷斷續續地說著：「莉……，我人在……在西門町……」莉莉趕忙說：「娟，我馬上去找妳，我會在西門站出口跟妳會合，妳可以到那裡等我嗎？」堵不住淚水



的可娟，斷斷續續地說道：「莉……，我……可……以……」「好，娟。妳先別哭，我一會兒就到了，妳等我喔！」莉莉二話不說，抓起了包包飛也似地奔向捷運站。

好不容易挨到了西門站，莉莉三步併做兩步，趕緊跑到和可娟約好的出口。只見可娟低頭倚著一旁的告示牌，盈滿淚水和雨水的臉上，只見呆滯。莉莉趕忙上前去拉起可娟的



手，握著莉莉的手，可娟不自主地一頭埋進莉莉的肩頭，放聲地大哭起來。莉莉輕拍著可娟的背脊，輕聲說：「娟，別哭了。我們去喝杯咖啡，告訴我到底怎麼了！」坐定的可娟，還是盈著濕濕的眼眶。莉莉握著可娟的手，問道：「到底怎麼了？告訴我。」可娟用著極輕的聲音說道：「我跟翰彬分手了！」莉莉聽著十分驚訝：「娟，怎麼會這樣呢？為什麼？那個渾小子到底有什麼理由和妳分手？」「莉……，妳也知道的。他的家人不太喜歡我，因為我不會煮菜，也不會整理家務，甚至翰彬的媽媽說她受不了我的潔癖！」可娟一邊抽噎著一邊說道：「我跟翰彬為了這些事，已經扭了好一陣脾氣。他大概也累了吧，就跟我說



分手。因為我總是跟他說，你又不是準備娶個菲傭回家，我不會做這些事很嚴重嗎？更何況吃飯應該用公筷母匙，不就是為了大家的健康著想嗎？他的家人居然說，我的潔癖太嚴重。莉……，妳說，這公平嗎？」

聽著可娟的訴苦，莉莉感同身受。莉莉總是覺得，雖然已經進入二十一世紀，可是把婚姻當作娶進一個老媽子的人大有人在，或者更貼切地講，男人都希望娶到一個洗衣、煮飯樣樣行，又能把皮膚保持得如嬰兒般細嫩的女人。可怕啊！又要馬兒肥，又要馬兒不吃草，真是太可惡了。莉莉對著可娟說：「娟，別哭。這樣的男生不值得！難道他不會據理力爭嗎？如果他真愛妳的話，就應該向他的家人說清楚，妳的習慣又沒什麼不好，一個人有好習慣，難道也錯了？」

心情盪在谷底的可娟，雖然知道莉莉講的有道理，可是經營這麼久的感情，居然經不起這樣一點兒小風浪的摧殘，總讓人難以釋懷。更何況，她把最美麗的青春時光，都放在翰彬身上，從來對別的男人就是不假辭色。在她心中早就認定，翰彬是終生所繫，怎料到會有這麼一天？

莉莉知道可娟很難放下維繫這麼久的戀情，只好想辦法找點其他的話題，看看能不能轉移焦點。可是這當兒，可娟哪有心情跟莉莉聊其他的事呢？沒輒的莉莉，只好設法用安慰的口吻說道：「娟，妳沒錯，妳真的沒有錯！錯是錯在翰彬，他不應該利用他家人的觀感，逼迫妳去做明明是錯誤的事啊。雖然他家的人都認為，不需要用公筷母匙，可是人



多不代表對啊！他家的人連這點雅量都沒有嗎？就算一時無法接受好了，也應該對妳的好習慣表示讚賞才是，怎麼反過來，想用多數的力量來壓迫妳屈服呢？」

聽了莉莉的話，可娟一臉委屈地說：「莉，我當然贊成妳說的。既然知道是對的事，怎麼不去做呢？可是妳知道，翰彬一直說很無奈，他覺得要改變家人的意見，比改變我的看法難太多了，所以他根本不想去嘗試。可是我卻覺得，這個世界很奇怪，明明知道自己是錯了，卻仗著人多硬是逼對方屈服，這不是太可笑了嗎？」

「娟，我贊成！我有時候也會覺得，只因為迫於多數的壓力，很難堅持自己認為對的事。就像妳的情形一樣，其實妳是否想過退讓一些，去學學家務、烹飪，也不要那麼堅持自己的習慣呢？」莉莉試著平復可娟的心情。「當然有，莉……。我當然這麼想過，可是總需要時間吧。妳想想看，要一個人在多數的壓力下，放棄自己的好習慣，遷就眾人的壞習慣，可有多難啊。有時候，我甚至會懷疑是我錯了，而不是他們錯了。唉！」可娟繼續說道：「這個世界真的讓我很難理解。人如果無知就罷了，可惜偏偏是明知道是錯的，還要這麼作！」

聽著可娟的傾吐，莉莉也替可娟感到難過。就跟可娟說：「換個角度想吧！也許妳是幸運的，不然的話妳真的嫁給翰彬，天曉得還要受多少罪？雖然交往這麼久，可是如果翰彬連保護妳的能力都沒有，也沒有和妳一起捍衛正確想

法的勇氣，如果妳真嫁了，不就得受盡委屈了嗎?」「我想也許妳是對的，莉。有時候為了堅持正確的想法，必須要付出一些代價吧。我想要在正確的想法和群眾壓力之間，作出選擇是不容易的事。如果翰彬沒有辦法堅持，那我可能真的會像妳說的一樣，受盡委屈吧!」



可娟的語氣總算稍稍平緩了些。莉莉趕緊抓住機會說道:「娟! 算了，別想太多了。未來還有很美好的寶藏等待發掘，暫時把這件事放在一邊。也說不定哪天翰彬想通了，會回過頭來承認自己的錯也說不定。反正既然妳沒有錯，那麼剩下的，就只能看他的家人什麼時候可以長進一些了。」窗外的雨勢漸漸地消退，莉莉看著窗外對可娟說:「娟，沒什麼雨了。我陪妳走一程，一起搭車回家吧!」「謝謝妳，莉。如果不是妳的話，我真的不知道該怎麼辦才好。」看著可娟的心情稍有舒緩，莉莉微笑著對可娟說道:「別傻了，娟。我永遠是妳最好的朋友!」

在生活週遭，不免常聽到一些似是而非的言論。這些似是而非的言論，就是所謂的謬誤。例如在故事中的主角——可娟，她所面臨的難題就稱之為「訴諸群眾的



謬誤」。

和訴諸群眾的謬誤有異曲同工之妙的，包括眾口鑠金、三人成虎等等狀況。在這種情況下，常會讓人無所適從，到底是應該堅持自己的信念呢？還是屈服在多數的壓力下？這種抉擇顯然不是邏輯能夠派上用途的地方。

而邏輯要做些什麼呢？邏輯所能夠做的，只是把這些問題呈現出來而已。如果能夠熟悉這些論證上的謬誤，可以幫助自己了解別人在論證上的問題，也可以避免自己犯這些錯誤。其實，如果人們肯多花一點心思去研究這些問題，就能夠減少許多不必要的爭執，更不用讓別人陷在掙扎的情況中。

在這個部分，我們將可以看到各種謬誤，而許多人犯了謬誤也不自知。希望在經過詳細的說明之後，能夠幫助大家在日常生活的溝通中，更加地有自信，也能夠適時指出別人論證的不當之處。

論證形式的謬誤

謬誤 (fallacy) 在使用上是一個多義的語詞，泛指不適當的推論。可是要將不適當的推論，用列舉的方式一一列出，

會相當繁雜。因此，為了簡單起見，在這裡只討論比較明顯的類型。謬誤的種類，基本上可以分成兩類：

⑴和論證形式有關的，亦即將無效論證，當作有效論證所產生的謬誤。對各位讀者來說，經過邏輯的一番洗禮之後，現在要指出論證形式的謬誤之處，可說是輕而易舉！

⑵和論證形式無關的，這類的謬誤通常不太容易察覺，因為這種謬誤的問題並不出在推論過程。也就是說，從論證上分析通常是有效論證。但是，論證的結論是令人無法接受的。例如在上述的故事中，女主角非常疑惑的就是，是否眾人認為對的就是對的呢？在論證形式上可以寫成有效論證。（眾人認為對的就是對的，眾人認為吃飯不必用公筷母匙，所以吃飯不必用公筷母匙。）但是，女主角之所以覺得結論無法接受，並不是論證形式出現了什麼問題，而是女主角壓根兒就不同意「眾人認為對的就是對的」的前提，簡言之，她不同意多數暴力可以被當作前提。

首先說明和論證形式有關的謬誤。截至目前為止，我們知道邏輯是研究有效推論的學科。也就是說，要研究哪些論證形式是有效論證。基於這個理由，凡是將無效論證誤認為有效論證，都稱為謬誤。雖然這種謬誤在生活中隨處可見，但是許多人並不是很清楚問題出在哪裡，原因當然是出在沒有經過邏輯思考的洗禮。讓我們一起來看看在論證形式



上常見的謬誤：

1.否定前件的謬誤

⒜肯定前件的有效論證

以條件句 (conditional) 和前件 (antecedent) 為前提的情況下，可以推論出後件 (consequence)。其論證形式如下：

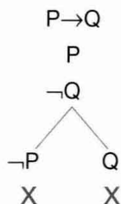
P：我被棒球 K 到
Q：我會痛

（條件句）	$P \rightarrow Q$
（前件）	P
（後件）	$\therefore Q$

上述的論證形式是有效論證。換成日常語言，前提為：

(i)「如果我被棒球 K 到，則我會痛」($P \rightarrow Q$)
(ii)「我被棒球 K 到」(P)

由這兩個前提，可以推論出我會痛 (Q) 的結論。即這個論證形式是有效論證。再用真值樹系統的演算法確定一下：



既然上述的論證形式是有效論證，那麼如果前提均為真，結論就不可能為假。換言之，在前提均成立的情況下，結論也一定會成立。

(b)否定前件的無效論證

可是，在條件句和前件的否定句成立的情況下，能不能推論出後件的否定句也一定成立呢？顯然不能。因為在條件句和前件的否定句均為真的情況下，後件的否定句仍有可能為假。也就是說，這種論證形式是無效論證：

P：我被棒球K到
Q：我會痛

$$
\begin{array}{rl}
\text{（條件句）} & P \to Q \\
\text{（前件的否定句）} & \neg P \\
\hline
\text{（後件的否定句）} & \therefore \neg Q
\end{array}
$$

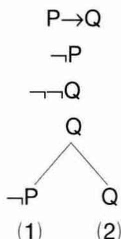
用實際例子來說，這個論證的前提：

(i)「如果我被棒球 K 到則我會痛」(P→Q)

(ii)「我沒被棒球 K 到」(¬P)

這兩個前提，不能推論出我不會痛 (¬Q) 的結論。因為就算我沒有被棒球 K 到，但是我卻跌了一跤，所以還是會痛呀！換言之，這個論證形式是無效論證。同樣地，用真值樹系統檢查一下：



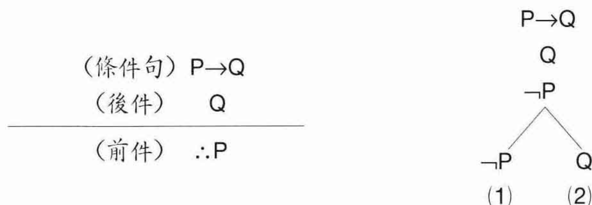


觀察分枝(1)的情況，{¬P, Q} 中的語句並未出現矛盾的情況。換言之，就是 ¬P 和 Q 可以同時為真。分枝(1)並且提供了一個反例結構，即 P 為假 (F) 而 Q 為真 (T)。反例結構的出現，就是宣告了這個論證形式是無效論證。換言之，即使在前提都成立的情況下，也不能推論出結論是成立的。例如，如果我有翅膀，那麼我就可以飛。我有翅膀嗎? 沒有，所以我不能飛。這個論證是無效論證，因為犯了否定前件的謬誤。想一想，雖然沒有翅膀，但是有滑翔翼，同樣也可以飛呀!

2. 肯定後件的謬誤

(a)肯定後件的無效論證

這個論證形式試圖由條件句和後件作為前提，推論出前件。然而這是一個無效論證，只要用真值樹系統的演算法一試便知：



觀察分枝(1)的情況，{¬P , Q} 中的語句，並未出現矛盾的情況。因此，分枝(1)提供了一個反例結構，即 P 為假 (F) 而 Q 為真 (T)。以日常語言來說就是，從

(i)「如果我被棒球 K 到，則我會痛」(P→Q)

(ii)「我會痛」(Q)

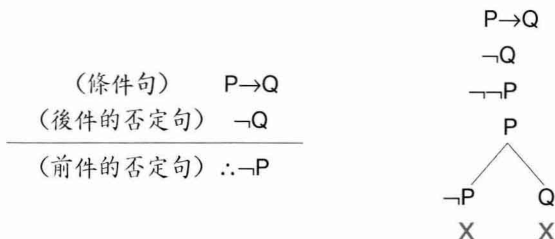
不能推論出我被棒球 K 到 (P) 的結論。

設想一下，沒有人會反對：「如果太陽爆炸，那麼人類將滅絕」這句話一定是真的。可是在人類真的滅絕的情況下，可以得到太陽真的爆炸了的結論嗎？不一定。因為有許多情況都可能造成人類滅絕，不單單是太陽爆炸。例如氣候的遽變，大氣層成分的改變等情況，都有可能造成人類的滅絕。所以，前提(i)如果太陽爆炸，那麼人類將滅絕；(ii)人類滅絕都成立的情況下，也無法得到太陽真的爆炸的結論。再例如如果我愛妳，則我可以為妳做任何犧牲。我可以為妳做任何犧牲嗎？可以。所以我愛妳。這個論證也是無效論證，同樣也是犯了肯定後件的謬誤。



⒝否定後件的有效論證

不過，以條件句和後件的否定句作為前提，可以推論出前件的否定句。同樣地，用真值樹系統演算一下：



由於所有的分枝都因產生矛盾而關閉。意思就是，這個論證形式是有效論證。以上述的例子來看，就是以(i)如果太陽爆炸，那麼人類將滅絕，和(ii)人類沒有滅絕為前提，可以推論出太陽並未爆炸的結論。

訴諸不當的權威和訴諸無知

1.訴諸不當的權威

所謂專家、權威都是用來形容在某個領域中學有專精的人。藉由專家的努力，可以彌補個人在生活上的許多需求。例如，生病的時候，會到醫院求診，選擇適切的專業科別，為什麼呢？因為經由專業醫師的診斷，可以得到適當的治療。換言之，以醫生的權威來推論哪些藥劑是有治療效果

的，這些推論都是適當、可被接受的。

然而設想一下，有個人的腹部疼痛不已，不到醫院去求診，只是告訴他的朋友，他目前的症狀如何如何。如果他的朋友告訴他：「根據我的經驗，上次我也有過相同的症狀，而經過醫生指示服了某種藥劑之後，腹痛的症狀就消失了。因此，你應該去服用某種藥劑，那麼你的腹痛症狀就會好了。」在這個論證中，顯然這個人所引用的權威是恰當的。可是，如果他的朋友說：「有個神壇做法超靈的，經過某某神壇的乩童做法之後，你腹痛的症狀一定會消失。因此，你應該讓神壇的乩童幫你做法，那麼你的腹痛症狀就會好了。」相信有不少人對這種說法嗤之以鼻，因為引用乩童的權威在治療疾病上是不適當的。因此，就治療疾病而言，後者就是犯了訴諸不當的權威 (The appeal to inappropriate authority) 的謬誤。

無論何時何地，若想說服別人時，就得引用適當的權威才能被別人接受。想想看在電視廣告中，經常出現「某某研究室發現……」這類的廣告詞，不正是企圖通過引用適當的權威的論證，讓你相信這些產品真的有效嗎？也就是說，如果某種藥品是強調乩童推薦的產品，相信沒有人敢使用這些產品吧！



2. 訴諸無知的謬誤

什麼是訴諸無知 (The appeal to ignorance) 呢? 假設某人欲說服他人相信「火星人存在」這個結論時, 他所使用的論證方式, 並不是通過某些火星人存在的證據, 得到火星人存在的結論, 而是訴諸對方在無法證明火星人不存在的情況下, 得到火星人存在的結論。這類的論證方式, 稱為訴諸無知的謬誤。有一句俗語是這麼說的:「寧可信其有, 不可信其無。」這句俗語, 充分地顯示了這類論證的謬誤所在。因為無法證明「……不存在」, 所以就必須相信「……存在」的結論, 這樣的態度顯然是有問題的。

當然, 許多人也許會不服氣, 認為在無法證明的情況下, 相信又何妨。這個想法聽起來無傷大雅, 可是有時候會在生活中造成一些遺憾。例如, 近年來非常橫行的詐騙集團, 就是利用訴諸無知的論證進行詐騙。

他們是如何利用訴諸無知的論證進行詐騙呢? 首先, 詐騙集團會編造許多足以取信他人的說法。例如, 律師的見證、實品照片的宣傳單、蓋有某某機關章的退費通知等等。接下來, 就是嚴酷的考驗了, 詐騙集團會恭喜你中了大獎, 或者有錢必須匯到你的戶頭等等。而你能不能證明這些退費或者中獎是真的呢? 詐騙集團通常會考慮到這個層次, 因此會提供受騙者電話查詢的服務, 讓你誤以為真有其人、真

有其事！當你使用電話查詢時，卻沒想到，竟然步入陷阱，越陷越深了！

最後，在你無法證明這件事為假的情況下，你就相信中獎或者退費是真有其事，於是被詐騙成功。詐騙集團的論證手法，說穿了就是一種訴諸無知的謬誤，如果相信這種論證沒有任何謬誤，那麼被詐騙就不足為奇了。如果知道詐騙集團利用訴諸無知的謬誤行騙，那麼有許多做法都可以避免被詐騙得逞。例如，不要回撥對方提供的電話，而是以查號臺查詢對方所提供的電話，以此進行真正的查詢動作。如此一來，就可以清楚地確認事情的真偽如何，當然就不會受到訴諸無知的謬誤的困擾。

可是，這種類型的論證並不是那麼容易解決。一般民間傳說的鬼神問題，許多人還是抱著「寧可信其有，不可信其無」的態度。

稻草人攻擊

在日常生活的對話過程中，常有人會這麼說：「嘿！你不要扭曲我的話，我的意思才不是這樣。」仔細想想，扭曲是什麼意思呢？一般來說，所謂的扭曲就是沒有掌握到說話者所要傳達的意思，當你重新傳達說話者的意思的時候，說話者認為你所重述的，並不是他所要表達的。基本上扭曲可以分成兩種情況來觀察：

1.聽的人誤解說話者的意思，而產生傳達上的錯誤。這種情況其實非常常見，例如男女在剛開始交往的時候，如果男生問女生說：「我可以吻妳嗎?」而女生回答說：「不可以。」此時，男生卻以為女生說不可以，其實就是「可以」的意思，進而採取實際行動，結局可能就是在臉頰上多了幾個巴掌印！這時候，女生就會強調「不可以」就是「不可以」！請不要隨意把「不可以」解釋成「可以」。這種情況就是誤解對方說的意思了。

如果只是無心之過就罷了，假如是刻意將某個語詞解釋成另一種意義的話，那就符合稻草人攻擊的情況了。假設小明和小華同時喜歡小媛。有一天剛好三個人聚在一起。在小明的眼中，小媛無疑是最美麗的。為了得到小媛的青睞，小明就對小媛說：「妳就像蝴蝶一般的美麗」，小媛聽到小明這麼說，心裡高興得不得了。而由於小華也很喜歡小媛，覺得讓小明獨占鰲頭，非常不高興。就刻意擺出一副不屑的表情，說道：「嘿！小明。你真的很沒風度耶，怎麼可以罵人呢?」

聽了小華的話，小明和小媛都一頭霧水，一點兒都不了解這句話跟罵人有什麼關係。於是，小媛很好奇地問：「他明明是稱讚我很美麗啊，怎麼說是罵人呢?」小華就接著說：「小媛！妳仔細想想看，在中學時代不是學過昆蟲的蛻變過程嗎? 而蝴蝶正屬於『完全變態』那一類。所以，小明說妳就像蝴蝶一般，其實暗地裡是損妳來著，妳還以為他安著什

麼好心嗎?」還好小明有機會可以當場說清楚，否則就被小華的稻草人攻擊暗算了。也許有許多人都遇過同樣的麻煩，就是別人在傳達自己說過的話時，刻意地曲解某個語詞，扭曲自己的意思。為了避免這樣的麻煩，除了了解這個問題之外，謹言慎行也很重要喔!

2.簡化論點的攻擊方式。這個方式就是將對手的論點簡化之後，再說對方的論點是如何地站不住腳。在日常生活中，尤其在論證的前提中，出現以統計為基礎的語句時，最容易出現。

假設有一個醫生對某種手術有相當的把握，因為根據他自己執行手術的經驗，手術的成功率高達 95%。某天當他要為某個病人進行手術前，只告訴病人家屬，這種手術成功的機率達 95%，還拍胸脯保證手術一定會成功，但是，卻沒有特別說明仍有 5% 失敗的可能性。

很不幸地，這次的手術失敗導致病人死亡。家屬悲痛不已，並且決定控告醫師有醫療疏失。家屬認為，當初醫生信誓旦旦保證手術一定會成功，結果怎麼會失敗呢?因此在法庭上，積極主張醫生有醫療過失責任。可是醫生在辯駁的時候，卻指出對方的主張是不成立的。因為手術之前，醫生的確有告知此一手術的成功率是 95%，而不是 100%，所以，還是有失敗的可能性。因此他沒有醫療過失責任。家屬認為，雖然醫生手術前，的確告訴家屬成功率是 95%，可是醫生一付信心滿滿的樣子，不就是意圖使家屬相信手術有

100% 的成功把握，所以，既然手術失敗，醫生當然必須負起醫療疏失的責任。

如果你是法官，你應該怎樣處理這場糾紛呢? 在這裡，並不是要深究法律問題，而是釐清論證的問題。在上述的攻防過程中，醫生採取的策略，就是稻草人攻擊的模式。家屬認為，當初是因為醫生信誓旦旦地保證，手術一定會成功，才會同意動手術。可是，醫生將家屬的論點簡化為，他已經盡到告知的責任（手術成功率是 95%，而不是 100%），是家屬未留意，才會以為手術一定會成功。

加上法官問家屬: 是否聽到醫生提到成功率只有 95%? 家屬也表示聽到醫生這麼說。那麼，在這個情況下，家屬若要以醫生的保證主張手術涉及醫療疏失，恐怕很難如願，勢必得採用其他理由才行。回過頭來說，醫生認為他並未承諾手術一定會成功，堅稱確有告知家屬手術成功率是95%。雖然這個理由，不足以駁倒信誓旦旦地保證意味著手術一定會成功的說法，但是，如果醫生成功地將對方的論點簡化為成功機率的爭執，那麼醫生的目的是可以得逞的。

情感、憐憫與暴力

1.訴諸情感的謬誤

在論證中，以不適當的情感訴求作為前提，取代了原有適當的前提，這類的論證均可稱為訴諸情感 (The appeal to emotion) 的謬誤。假設某人能力平平，卻被拔擢為經理，而主管拔擢他的理由，正是因為他會逢迎拍馬。此時主管所犯的便是訴諸情感的謬誤。因為他誤認為會逢迎拍馬的人，能力就是比較佳的。

(A1)

凡是會逢迎拍馬者，能力一定是強的
某人會逢迎拍馬

某人能力是強的

(A2)

公司將拔擢能力最強的人升任經理
某人能力是強的

某人升任經理

雖然 (A1)(A2) 都是有效論證，但是以逢迎拍馬作為考核能力的依據，顯然是不適當的。必須注意的是，這類謬誤的出現，是在不當的前提出現的狀況下才成立。以上述的例子而言，拔擢經理的前提應該以能力為依據，所以訴諸個人情感是會造成謬誤的。



然而，有些情況下訴諸情感是適當的前提。假設某個男生送東西給某個女生，女生好奇地問這個男生，為什麼要送東西給她？男生回答：「因為我喜歡妳，所以要送東西給妳」。以這個情況而論，雖然男生是訴諸情感，但是並沒有謬誤的情況。因為他是訴諸適當的情感而做出這樣的結論。

2. 訴諸憐憫的謬誤

還有一種訴諸情感的謬誤，稱為訴諸憐憫 (The appeal to pity) 的謬誤，例如假乞討集團，他們就是利用大眾的憐憫之心，來達到斂財的目的。

為什麼他們可以達到斂財的目的呢？因為一般人會同意下列這個論證：

(A3)　凡是看到可憐的人，都應該幫助他們
　　　在路邊乞討且身有殘疾的人是可憐的
　　　————————————————
　　　我們應該幫助他們

這些不法集團，便是利用一般人會接受論證 (A3) 的想法，進行斂財之實。更可惡的是誘騙兒童，甚至殘其肢體，進而達到引發人們憐憫之心的做法。

當然，不可否認的，有些人的確是非常需要幫助。可是，因為假乞討集團的出現，會使得一般人開始修正論證 (A3)，而有新的論證 (A4)。

(A4)　凡是看到可憐的人，都應該幫助他們
在路邊乞討且身有殘疾的人不一定是可憐的

我們不一定要幫助他們

由於論證 (A3) 和論證 (A4) 的結論不同，面對在路邊乞討且身有殘疾的人時，到底該不該幫助他們呢？也正因為如此，許多幫助弱勢的團體組織，會實際地去考察對方的生活狀況。如果在考察之後，發現對方確實需要幫助，那麼就會展開救助的工作。像這些調查工作，就是為了避免產生訴諸憐憫的謬誤的情況發生。

3. 訴諸暴力的謬誤

除了上述的訴諸情感的謬誤之外，還有經常出現的訴諸暴力 (The appeal to force) 的謬誤。西方有句諺語：強權即真理，就是標準的訴諸暴力的寫照。即使大家都說現代社會已經進入文明時代，而所謂的文明不就是應該用講道理的方式來解決爭議嗎？怎麼有時候，還會在傳播媒體上，聽到有人會義正詞嚴地宣稱：小孩就是要打、女人就是要打，不打不會聽話、不會乖這類的說辭？聽來實在驚悚！換句話說在這個號稱文明時代的今日，相信暴力可以達到目的的人仍不在少數。這種發展實在令人擔憂，如果暴力可以作為理由，那麼不難想像整個社會將深陷惶恐不安之中。

在人類的歷史上，為了讓訴諸暴力具有正當性，曾經出現過以牙還牙，以眼還眼的法條內容。但是，時至今日，法律並不允許這樣的行為出現，尤其私刑是犯法的行為。換言之，所謂的文明時代，認為不應該賦予訴諸暴力任何正當性。然而在日常生活中，這類的謬誤還是經常出現，例如，上司對下屬說：「道理？什麼道理？我就是道理」；或者，丈夫對妻子說：「妳就是應該做家事，否則我會好好教訓妳，我的拳頭就是道理」。這些都是訴諸暴力的謬誤的典型例子。

乞求爭點、分稱與合稱

1. 乞求爭點

乞求爭點 (Begging the question) 這類論證的問題是，本來需要被證明的結論，已經被放在前提中，當作已成立的前提使用。如此一來，原來利用論證想要證明結論是成立的，卻早已預設結論成立，那麼整個論證不就是白費力氣嗎？有這種特徵的論證就是犯了乞求爭點的毛病。

舉例來說，如果小明想證明上帝存在，他的方式是——拿著《聖經》告訴小華說：「你看看，《聖經》中充滿了上帝的啟示，上帝當然存在呀！」在這個情況下，小明的論證就犯了乞求爭點的毛病。因為在小明論證的前提中，已經預設

上帝存在了。為什麼呢?因為在論證的前提中出現上帝的啟示,而上帝的啟示必須先預設上帝存在,才會有所謂的上帝的啟示。所以,以上帝的啟示作為證明上帝存在的證據,就是犯了乞求爭點的錯誤。

乞求爭點的問題,在日常生活中俯拾皆是。例如,在應徵工作的時候,很多人都會懷疑,應徵單位有沒有內定人選?如果已經有內定人選,那麼所有的應徵過程不就是鬧劇一場?沒錯,在這種情況下,整個應徵過程根本是多餘的,何不直接宣布已錄取某人就好了。辛苦而冗長的應徵過程,不過就是用來粉飾門面,讓外人誤以為是公平、公開的徵選。這種設計就是出於乞求爭點的設計。

2.分稱的謬誤與合稱的謬誤

接下來要介紹的是,分稱的謬誤 (fallacy of division) 與合稱的謬誤 (fallacy of composition),它們涉及到的是整體一部分 (whole-part) 的問題。

所謂分稱的謬誤是指:認定一個東西的整體具有某種性質,進一步推論出組成這個東西的每個部分,都具有這個性質。例如,當你看到一部汽車,覺得這部汽車是一部很好的汽車,那麼能不能根據前提這是一部好汽車,得到這部汽車的每個部分都是好的結論呢?顯然不行。因為這部車可能引擎的聲音很大、或是它產生冷氣的機能已經不再那麼強

勁了，但就整體上來說，它仍不失為一部好車！

再假設你認為小明是好人，是不是同時認定小明所表現的每個行為都是好的呢？可能不是。你認定小明是好人，是對小明的整體評價，而不蘊涵你認定小明所做的每個行為都是好的。因此，如果小華以小明的某個不當行為為理由，得到你不應該認定小明是好人的結論，這種論證就犯了分稱的謬誤。面對上述的質疑，你可以回答：「雖然小明的某個行為不當，可是大體上還算是個好人。」也就是，對於「某個人是否為好人？」的認定，是基於整體的評價方式，而此一評價，雖然和其個別行為有關，但是和個別行為之間，並不一定有蘊涵關係。

而合稱的謬誤是指：由於每個組成部分都擁有某種性質，就認定整體也擁有某種性質。這種手法最常被利用作為宣傳，例如分期付款。當某個行銷人員告訴顧客，用分期付款的方式購買，每個月付的金額只有一點點而已，非常便宜。此時，行銷人員想要造成一種假象：「因為每個月付出的錢不多，所以這個東西並不貴」。然而，每個月的付款不多，並不代表這個東西很便宜。所以，如果從部分所擁有的性質，推論出整體也擁有這個性質，就是犯了合稱的謬誤。

假設有個人到家具店去，準備為他的新居添購家具，於是他挑了最好看的櫃子、最好看的沙發、最好看的電視櫃、最好看的茶几、最好看的燈具等等。當他十分高興地把東西帶回家，開始擺設的時候，問題就出現了。雖然所有的東西

都是最好看的，可是擺在一起可能很不協調，顏色也顯得亂七八糟。換言之，他就是犯了合稱的謬誤，所以才花了大錢，卻得不到預期的效果！你是不是也有類似的經驗呢！

本章小結

經過邏輯的思考訓練後，將成果應用在日常生活中，當然是非常重要的。但由於應用的範圍十分廣泛，作者只能就比較常見的謬誤和讀者們分享。從這些謬誤中，可以發現在日常活中，因為人們思考不縝密，而帶來的問題非常嚴重。希望藉由這些應用，能收拋磚引玉之效，讓讀者們對自己多審視一番，避免在日常生活中出現這些問題，相信對各位讀者的生活助益不少，在工作方面也會更有效率。

附錄

邏輯學家側寫

卡納普 (Rudolf Carnap, 1891-1970)



德國出生的美國哲學家。維也納學派的領導者之一，邏輯經驗主義的倡導者，在語意學、科學哲學、或然率的概念和歸納邏輯方面有重大貢獻。1921 年在耶拿大學獲得哲學博士學位，1935 年移居美國，任教於芝加哥大學，之後又任教於加州大學洛杉磯分校。

在其重要的著作《世界的邏輯結構》(*Die Logische Aufbau der Welt*, 1928) 中，嘗試用弗雷格和羅素的新邏輯來解決科學哲學的問題，此書直到 1967 年才被翻譯成英文。其他重要的著作包括《語言的邏輯句法》(*Die Logische Syntax der Sprach*, 1934)、《語意學導論》(*Introduction to Semantics*, 1941)、《邏輯之形式化》(*The Formalization of Logic*, 1942)、《意義與必然性》(*Meaning and Necessity*, 1947)、《或然率的邏輯基礎》(*The Logical Foundation of Probability*, 1950) 等。

塔斯基 (Alfred Tarski, 1901-1983)



美籍波蘭數學家、邏輯學家。塔斯基最重要的貢獻莫過於對「真理 (truth)」概念的分析，並以「T —語句」的雙條件句形式說明真理概念。「T —語句」的形式是「語句“p”為真，若且唯若，p」，每一個雙條件句都是真理的部分定義 (partial definition)，給定某個形式語言，所有塔斯基雙條件句合起來，就可以構成「真理」的隱性定義 (implicit definition)。關於塔斯基的重要論文，收集在《邏輯學、語意學、後設數學》(*Logic, Semantics, Metamathematics*, 1956) 論文集中。

戈代爾 (Kurt Goedel, 1906-1978)



奧地利邏輯學家。在其 1931 年所發表的著名論文〈論《數學原理》和有關系統 I 的形式不可判定命題〉('Ueber formal untenscheidbare Saetze der Principia Mathematca und verwandter Systeme I') 中，提出了著名的戈代爾不完備定理。第一個定理是，當形式語言擴展到包括算數 (arithmatics)，完備性定理即不成立。換言之，某些在語言中為真的語句無法被證

明。第二個定理是宣稱理論的一致性，無法經由理論本身證明之。換言之，對於任何理論 T 而言，T 的一致性 (Consist T) 不是 T 中的一個定理，即使將理論 T 擴展為 S，而在理論 S 中，T 的一致性被當作公理，則理論 S 的一致性在理論 S 中仍是不可證明的。



奎因 (Willard Van Orman Quine, 1908-2000)

美國哲學家及邏輯學家。1932 年於哈佛拿到博士學位，在四年的博士後研究之後，於 1936 年得到哈佛的教職，直到 1978 年從教職退休。

奎因的著作非常豐富，也觸及許多領域，包括邏輯、集合論、語言哲學、心靈哲學、科學哲學、形上學、知識論等。在其論著中最具影響力的是〈經驗主義的兩項獨斷〉('Two Dogmas of Empiricism', 1951),〈論什麼存在〉('On What there is', 1948)，此兩篇論文均收錄於《從邏輯的觀點看》(*From a Logical Point of View*, 1953) 一書中。而在其最著名的著作《文字與對象》(*Word and Object*) 一書中，主張自然化知識論、物理主義，並且發展了一種行為主義的語句意義概念，將語言的學習理論化。



喬姆斯基 (Noam Chomsky, 1928-)

美國卓越的語言學家及哲學家，其專業生涯皆在麻省理工學院度過。在喬姆斯基的語言學理論中，將語言視為言說者的大腦結構，其理論正是在抽象的層次上描述這些結構。這些結構被視為發生在語言能力內，而語言能力是人類大腦的基本架構。普遍文法是如軟體般內建於語言能力的原則，而該組原則決定了所有可能人類語言所構成的集合。



克里普基 (Saul Kripke, 1940-)

美國數學家及哲學家，在邏輯和哲學的領域中，具有深遠的影響力。在十餘歲時，就基於萊布尼茲的可能世界 (possible worlds) 概念，形構了一個關於模態邏輯的語意學。

克里普基的 1970 年在普林斯頓的演講集《命名與必然性》(*Naming and Necessity*)，樹立的一個分水嶺。在該書中，提出專名是嚴格指稱詞 (rigid designator) 的立場，所謂的嚴格指稱詞是認定，專名在某個世界指涉某個事物，那麼此一專名在該事物存在的可能世界中都指涉該事物，而在該事物不存在的可能世界中，此專名不指涉任何事物。

古典邏輯重要事件與著作年表

年代	重要記事
1843	彌爾 (John Stuart Mill, 1806-1873),《邏輯系統》(*System of Logic*)。
1847	布爾 (George Boole , 1815-1864),《邏輯的數學分析》(*The Mathematical Analysis of Logic*)。
1854	布爾,《思想律則》(*Laws of Thought*)。
1879	弗雷格,《概念記法》(*Begriffschift*)。
1884	弗雷格,《算學基礎》(*The Foundations of Arithmetic*)。
1891	弗雷格,〈函項與概念〉('Function and Concept')。
1892	弗雷格,〈概念與對象〉('Concept and Object')。 弗雷格,〈意涵與指謂〉('On Sense and Reference')。
1902	出現羅素悖論 (Russell's Paradox)。
1905	羅素,〈論指涉〉('On Denoting')。
1910	羅素與懷海德 (Alfred Whitehead, 1861-1947) 合著,《數學原理》(*Principia Mathematica*)。
1922	維根斯坦,《論叢》(*Tractatus Logico-Philosophicus*)。
1928	卡納普,《世界的邏輯結構》(*The Logical Structure of the World*)。
1930	戈代爾, 證明一階邏輯的完備性定理。
1931	塔斯基,〈形式化語言中的真理概念〉 ('The Concept of Truth in Formalized Language')。 戈代爾證明不完備性定理。
1935	萊興巴哈 (Hans Reichenbach, 1891-1953),《或然率理論》(*The Theory of Probability*)。
1937	涂林 (Alan Turing, 1912-1954),〈論可計算之數〉('On Computable Numbers')。
1939	卡納普,《邏輯與數學基礎》(*Foundations of Logic and Mathematics*)。
1941	塔斯基,《邏輯與演繹科學方法論導論》(*Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Science*)。

1943	卡納普,《邏輯之形式化》(*Formalization of Logic*)。
1944	塔斯基,〈真理的語意概念與語意學基礎〉('The Semantic Concept of Truth and the Foundations of Semantics')。
1950	奎因,《邏輯方法》(*Methods of Logic*)。 卡納普,《或然率的邏輯基礎》(*The Logical Foundation of Probability*)。
1952	史喬松 (Peter Frederick Strawson, 1919-),《邏輯理論導論》(*Introduction to Logical Theory*)。
1953	奎因,《從邏輯的觀點看》(*From a Logical Point of View*)。
1960	奎因,《字詞與對象》, (*Word and Object*)。
1963	奎因,《集合論及其邏輯》(*Set Theory and Its Logic*)。
1968	喬姆斯基,《語言與心靈》(*Language and Mind*)。
1970	奎因,《邏輯哲學》(*Philosophy of Logic*)。
1972	克里普基,〈命名與必然性〉('Naming and Necessity')。
1973	路易士 (David Lewis, 1941-),《反事實條件句》(*Counterfactuals*)。



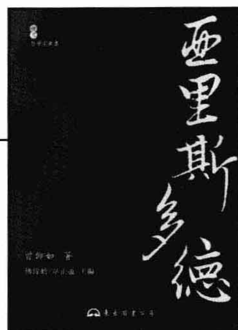
◎西洋哲學史

傅偉勳／著

本書作者始終認為，哲學史概念的把握，乃是哲學探求的一種極其重要而不可或缺的思維訓練。通過哲學史的鑽研，我們能夠培養足以包容及超克前哲思想的新觀點、新理路，且能揚棄我們可能具有的褊狹固陋的思想。

◎亞里斯多德

曾仰如／著



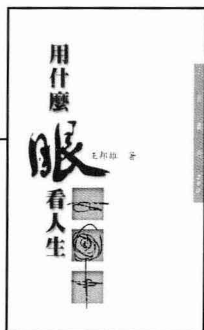
「真理之化身、學問之父、智者之大師」的亞里斯多德，其思想影響世人歷久不衰。本書將其學說以忠實有系統的介紹，盼能對研究其思想與有興趣者提供參考，進而建立哲學體系及肯定人生之真諦。（世界哲學家叢書，一共149位）



◎青年與學問

唐君毅／著

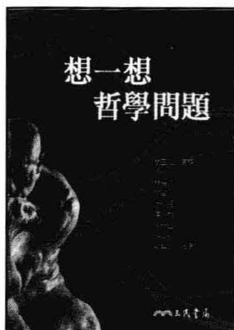
唐先生自言：「我在每寫一文時，我總是在迫切希望青年們能發憤讀書造學問，成就他自己，以開拓中國文化之前途。」其盼望，可見一斑。或許時代變了，青年也不同了，但謀求學問之道卻是千古如一：惟一「勤」字耳！本書是青年學子不可不讀的經典。



◎用什麼眼看人生

王邦雄／著

以中文系出身的文筆，書寫哲學所體現的內涵，字裡行間流露的仍是家國天下的深切關懷。「經典義理」要活用於今天，「人文生命」總要在傳承中永續，「人間萬象」藏有人文關懷，而「異國心旅」中激盪的仍是鄉土情思。試圖在傳統經典的現代詮釋，給出消解生命苦難的哲理藥方。



◎想一想哲學問題

林正弘／主編

常常，我們碰到一些難有定論的問題，這些問題雖然無法用常識的、科學的或類似數學的嚴格證明來解答，卻與我們所關心的人事物息息相關？沒錯，這些正是哲學問題。本書藉由15個日常生活中的困惑，引發您對哲學探究的興趣，希望與您共度美好、恬靜的沉思時光。

◎西洋哲學史話（增訂二版）

鄔昆如／著



「哲學」究竟是什麼？源自古希臘的西洋哲學，經過漫長而沉潛的累積和精練，如今又以何種面貌省思著人生、社會與世界呢？哲學家以銳利獨到的眼光剖析時代的癥結，企圖提出解答、指引新方向。回顧哲學的歷史發展，俾能使人更清楚地認識自身的立場與可能的價值。



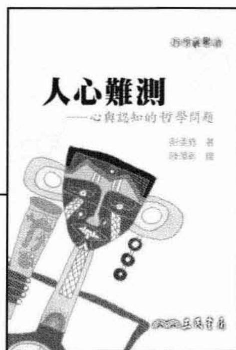
◎這是個什麼樣的世界？

王文方／著

在街上遇到郭靖？有 100 個自己？天啊，這是個什麼樣的世界！本書透過生動鮮明的舉例，淺介「形上學」中各個重要主題，包括因果、等同、虛構人物、鬼神、矛盾、自由意志等。哲學家說「形上學是研究世界基本結構」的一門學問，但是什麼是「世界」、什麼是「世界的基本結構」呢？好奇寶寶別擔心，本書論述淺明、舉例豐富，絕對能滿足愛胡思亂想的你喔！

◎人心難測——心與認知的哲學問題？

彭孟堯／著



與植物人談戀愛的機器人！如果思考、認知與情緒是大腦的作用，那麼刻骨銘心的愛情與永恆不變的友情，也只是大腦神經系統的一連串反應？如果情感只是腦神經的反應，當我們創造出會思考、有情欲的機器人時，要如何區分彼此呢？人類的思維和情感表現，真的只能用大腦神經系統來解釋嗎？還有什麼關鍵被忽略了呢？